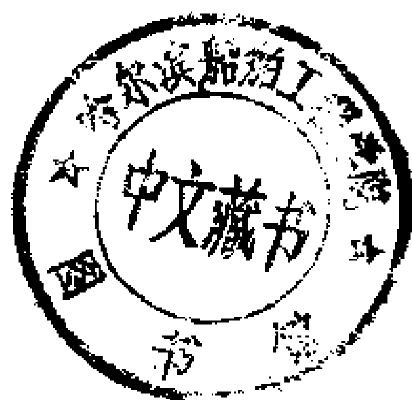
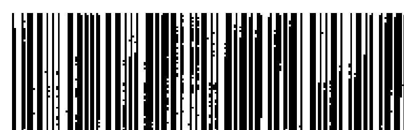
北京大学数学丛书

位 势 论

张鸣镛 著





北京大学出版社
·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

位势论/张鸣镛著.—北京:北京大学出版社,1998.12
(北京大学数学丛书)
ISBN 7-301-02781-8

Ⅰ.位… Ⅱ.张… Ⅲ.位势论 Ⅳ.O174.3

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第02549号

书　　名:位势论(北京大学数学丛书)
著作责任者:张鸣镛　著
责任编辑:刘　勇　孙　晔
标准书号:ISBN 7-301-02781-8/O·350
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　话:出版部 62752015　发行部 62559712　编辑部 62752032
排　印　者:北京大学印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
850mm×1168mm　32开本　9.875印张　250千字
1998年12月第一版　1998年12月第一次印刷
印　　数:0001—3,000册
定　　价:16.50元

《北京大学数学丛书》书目

1. 同伦论基础　　廖山涛等著
2. 抽样论　　许宝騄著
3. 微分几何讲义　　陈省身等著
4. H_p 鞅论　　龙瑞麟著
5. 代数曲线　　[美] P・格列菲斯著
6. 代数学(上、下)　　莫宗坚等著
7. 黎曼几何初步　　伍鸿熙等著
8. 二阶矩阵群的表示与自守形式　　黎景辉等著
9. 微分动力系统导引　　张锦炎等著
10. 无限元方法　　应隆安著
11. 李群讲义　　项武义等著
12. H^p 空间论　　邓东皋等著
13. 黎曼几何选讲　　伍鸿熙等著
14. 矩阵计算的理论与方法　　徐树方编著
15. 位势论　　张鸣镛著

说　　明

此丛书是以数学、计算数学、概率统计及有关专业的高年级学生、研究生、青年教师及数学研究工作者为读者对象的出版物.丛书特点是内容新颖、力图反映现代数学的新成就；叙述精练，约相当于一学期周学时为3的研究生课程的取材.我们编辑出版此丛书的主要目的是为了适应我们国家培养研究生的需要，同时，又可作为数学及有关系科高年级选修课程的参考书，为提高本科生的教学质量贡献一份力量.

我们诚恳地希望：广大读者对于书目的选择，内容的取材提出宝贵意见，作为我们今后出版或再版时的参考.

《北京大学数学丛书》编委会

一九八一年元月

内 容 简 介

从20世纪以来,在测度及拓扑的基础上形成了现代位势理论.本书系统而又精辟地讲述了位势论的基本原理和方法,总结了我国50年代以来现代位势论研究的成果,包括作者相当数量的研究成果.全书共分五章,内容包括:测度、积分、拓扑,位势及上调和函数,扫除法,容量、点集的肥瘦和细拓扑,Dirichlet问题、扫除法的推广等.每节后配有适量习题供读者选用.附录部分对现代位势论在若干方面的发展作了简明的介绍.

本书叙述严谨,深入浅出,富有启发性.注意现代位势论与物理、微分方程、概率论和函数论之间的联系,强调位势论的演变、发展和对各学科的影响,勾画出现代位势论的研究概貌,以引起读者的兴趣和思考,把读者带进现代位势论的研究领域.

本书可作为大学数学、应用数学、概率、物理等系高年级大学生和研究生的教材或参考书,也可供从事位势理论研究及相关专业的科技工作者阅读.

序

张鸣镛教授(1926～1986)是我国杰出的数学家.他秉性豪放,才华横溢.早在求学时代,他师从陈建功先生和苏步青先生,同时钻研分析学和几何学.在两位高师的熏陶下,他的数学功力的深厚广博,在当时浙江大学数学系历届高材生中也是少有的.1952年院系调整后,他一直在厦门大学任教,他的研究工作涉及数学的许多分支.到50年代中期,他已在现代位势理论方面发表了一系列引人注目的研究成果.可惜从1957年以来,在"左"的政治影响下他遭受了不公正的待遇,他的研究工作不幸被逼中断.直到60年代初期,他才能在数学岗位上发挥作用.他当即在厦门大学数学系开设了位势理论专门化课程,深受年轻学子的推崇.其后在十年浩劫中,他的业务工作全部被逼中断,70年代后期拨乱反正之后,他才获得新生.从此他在开展研究工作的同时,致全力于研究生的培养,多次为位势论方面的研究生开设各项有关课程,并悉心指导他们的学位论文,到80年代中期已培养出一批现代位势论方面的新秀.过去我国在位势论方面的研究极为薄弱,特别是现代位势论方面的研究几乎是空白.张鸣镛教授志在振兴我国的现代数学,为使我国在位势论方面的研究能迅速赶上国际的现代发展,他才从他自己涉及面极为广博的研究工作中集中到现代位势论的研究,并致力于新生力量的培养.他虽历经坎坷而其志弥坚,呕心沥血地为培养这方面的人才而不遗余力,直到癌症夺去了他可贵的生命.

本书即以张鸣镛教授在60年代开设的位势论专门化课程的讲义为基础,并以他在1979年亲自修订后作为厦门大学和福州大

学数学系研究生教材的讲义为蓝本，又收集了一个附录所组成．这个附录是他的学生根据张教授指导中所记录的笔记整理出来的．本书内容确实反映了张鸣镛教授为促使现代位势理论能在我国迅速发展所花出的心血．他在本书中精辟而又深入浅出地讲解了现代位势论的基本原理和方法，既能使读者便于掌握它们，又能使读者掌握之后便于开展现代位势论的研究．而本书的附录对于位势论的若干现代的发展又提供了简明的介绍．所以本书的出版既为我国高校数学（或应用数学）专业以及其相邻专业的研究生教材和本科高年级学生的选修课教材提供了优秀的新书，又能为促进我国位势论的现代发展起到所能起的作用．而后者正是张鸣镛教授生平的夙愿，在这个意义上来说，本书的出版又可以看成对作者的一个永恒纪念．

位势理论有长久的发展历史，它的古典理论在 19 世纪中叶就已形成，它同物理有密切的联系，其名称就表明了这一点．实际上，它同复变函数、Laplace 方程都是研究电磁场的基本数学工具．从 20 世纪以来，在测度及拓扑的基础上形成了现代位势理论．它同物理仍有密切联系，而且联系得更广泛了．尤其它同 Brown 运动的深刻联系使位势论的基本概念得到了明确的概率论意义，于是概率论方法引进到位势论的研究中来；反过来，位势论的工具也促进了概率论的发展．二者的相互渗透是近代位势论的一个重要特点．它仍然同微分方程的研究联系在一起，但现在牵涉到了一般的二阶及高阶椭圆型方程、其他类型的方程如抛物型方程、Schrödinger 方程、以至一般的非线性方程，因之有了非线性位势论．同时，由于引入公理化思想还形成了极为重要的公理化位势论．所以半个多世纪以来，位势理论有了巨大的发展，形成了一个内容丰富、充满活力的数学分支．张鸣镛教授早在 50 年代就提倡现代位势论的研究是具有远见卓识的．

本书的出版首先要感谢张鸣镛教授的弟弟清华大学应用数学系张鸣华教授自始至终的大力支持．高琪仁（厦门大学）、涂铉基（福州大学）、吴炯圻（漳州师范学院）诸位副教授在编写附录、进行校订、统一数学名词以及编制索引等工作中，做出了卓有成效的贡献；北京大学出版社编审邱淑清一贯关注、重视并主持《北京大学数学丛书》的编辑出版工作，并付出了极大精力．在此一并表示由衷的感谢！

程民德

1992 年 9 月于北京

目　录

第一章　测度、积分、拓扑 ………… (1)

§1.1　测度 ………… (1)

§1.2　积分 ………… (10)

§1.3　不定积分及绝对连续测度 ………… (19)

§1.4　乘积测度及 Fubini 定理 ………… (23)

§1.5　测度的扩张及外测度 ………… (32)

§1.6　拓扑空间上的测度及连续函数空间上的泛函 ………… (41)

§1.7　测度的浑收敛 ………… (64)

第二章　位势及上调和函数 ………… (74)

§2.1　位势概念的由来 ………… (74)

§2.2　位势 U_α^μ 和它的连续性 ………… (76)

§2.3　E^n 上的几何和有关的微积分原理 ………… (80)

§2.4　E^n 的子区域里的调和函数 ………… (87)

§2.5　位势的上调和性 ………… (94)

§2.6　F. Riesz 的分解定理 ………… (101)

§2.7　相对于开球的 Green 位势 ………… (113)

第三章　扫除法 ………… (119)

§3.1　候补 Hilbert 空间及投影 ………… (120)

§3.2　α 级位势及能量的符号 ………… (124)

§3.3　强收敛、弱收敛及浑收敛 ………… (128)

§3.4　凌驾原理及扫除法 ………… (137)

第四章　容量、点集的肥瘦和细拓扑 …………………… (148)

§4.1　紧致集的容量及平衡分布 …………………… (148)

§4.2　外容量、内容量与可定容 …………………… (158)

§4.3　零容集及极大值原理 …………………… (165)

§4.4　点集的肥瘦 …………………… (175)

§4.5　细(肥)拓扑 …………………… (190)

第五章　Dirichlet 问题、扫除法的推广 …………………… (196)

§5.1　Dirichlet 问题及正则边界点 …………………… (196)

§5.2　边界数据不连续的情况 …………………… (203)

§5.3　Brelot 关于"干脆性"的理论 …………………… (207)

§5.4　关于调和测度下的零集 …………………… (210)

§5.5　上下解在不正则边界点的细极限 …………………… (216)

§5.6　边界的改造、分歧边界 …………………… (226)

§5.7　Martin 边界 …………………… (234)

附录　现代位势论简介 …………………… (246)

位势论发展简史 …………………… (250)

§1　一般核的位势 …………………… (252)

§2　抽象位势及理想边界 …………………… (261)

§3　Abel 群上的位势论 …………………… (272)

§4　公理位势论 …………………… (278)

§5　位势论与其他数学分支的联系及发展 …………………… (287)

记号表 …………………… (294)

索引 …………………… (297)

第一章　测度、积分、拓扑

§1.1　测　　度

集合以及有关的基本概念假定读者已经熟悉. 自然，我们谈的远不止是欧氏空间或者它的子集.

我们考虑一个集合 X 及 X 的子集，X 的元素也称为点. 于是 X 及它的子集都是点集. 为了方便，X 也称为空间.

集合的交集、和集用通常的记号. 集合 A 的余集记作 $C(A)$，而 $A\cap C(B)$ 也记作 $A\setminus B$. 由单独一点 P 组成的集合记作 $\{P\}$. 下面也用 $\{P_i\}$ 表示点列 $\{P_i\}(i=1,2,\cdots)$，即点列 $\{P_1,P_2,\cdots\}$，但这不会引起混淆.

假定 Φ 是 X 的一族子集，Φ 不空并且有下面的性质：

(1) 如果 $A_1\in\Phi, A_2\in\Phi$，那么 $A_1\setminus A_2\in\Phi$；

(2) 如果 $A_i\in\Phi(i=1,2,\cdots)$，那么 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\in\Phi$，

就称 Φ 是由 X 的子集所组成的一个 **σ 环**.

假定 Φ 是由 X 的子集所组成的一个 σ 环，每个 $A\in\Phi$ 都对应着一个实数 $\mu(A)$ 或者 $\pm\infty$，那么说这个对应关系 μ 是在 Φ 上定义的一个**集函数**. 如果对属于 Φ 的任何可列个两两不相交的集合 $A_1,A_2,\cdots$，下列式子成立：

$$\mu\left(\bigcup_i A_i\right)=\sum_i \mu(A_i), \tag{1.1.1}$$

就说 μ 是**绝对可加的**（或者**完全可加的**）.

注意：(1.1.1)式成立就表示等号右边的和式里不会同时出现等于 $+\infty$ 及等于 $-\infty$ 的项，因为 $+\infty-\infty$ 是没有意义的. 关于 $\pm\infty$

的四则运算，我们采用习惯的规定：

当 $0<a\leqslant+\infty$ 的时候，

$$a\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot a=(-a)\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot(-a)$$
$$=a\cdot\infty=\infty\cdot a=+\infty,$$
$$a\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot a=(-a)\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot(-a)$$
$$=-a\cdot\infty=-\infty\cdot a=-\infty,$$
$$0\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot 0=0\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot 0=0;$$

当 $-\infty<a\leqslant+\infty$ 的时候，

$$a+\infty=\infty+a=+\infty,$$
$$-a-\infty=-\infty-a=-\infty;$$

当 $0<a<+\infty$ 的时候，

$$+\infty/a=-\infty/(-a)=+\infty,$$
$$-\infty/a=+\infty/(-a)=-\infty,$$
$$a/(+\infty)=-a/(+\infty)=a/(-\infty)=-a/(-\infty)=0.$$

定义 假定 Φ 是由空间 X 的子集所组成的 σ 环，μ 是定义在 Φ 上的一个绝对可加集函数，并且至少存在一个 $A\in\Phi$ 使 $|\mu(A)|<+\infty$，就说 μ 是一个**测度**或者**质量分布**. 对每一个 $A\in\Phi$，$\mu(A)$ 叫做 A **的测度**或者**分布在 A 里的质量**. 每个 $A\in\Phi$ 称作一个**可测集**（相对于 μ）.

定理 1.1.1 假定 Φ 是由空间 X 的子集构成的一个 σ 环，那么空集 $\varnothing\in\Phi$. 如果再假定 μ 是在 Φ 上定义的测度，那么 $\mu(\varnothing)=0$.

证明 假定 $A\in\Phi$，那么由 σ 环的定义知道 $A\backslash A\in\Phi$，因此 $\varnothing\in\Phi$. 再假定 μ 是一个测度，那么存在一个 $A\in\Phi$，使 $\mu(A)$ 有限. 所以

$$\mu(A)=\mu(A\cup\varnothing)=\mu(A)+\mu(\varnothing).$$

由此得到 $\mu(\varnothing)=0$. ▎

下面我们举几个测度的例子. 当然，测度是一个非常广泛的概念，这几个例子并没有多大的代表性. 在举例以前，先请大家注意：

如果一个测度 μ 在 σ 环 Φ 上定义，那么 μ 当然在 Φ 的任何一个子 σ 环上也有定义. 空间 X 的所有子集(包括空集)全体当然构成一个 σ 环 $\widetilde{\Phi}$. $\widetilde{\Phi}$ 是最大的由 X 的子集构成的 σ 环，也就是由 X 的子集构成的任何一个 σ 环 $\Phi\subseteq\widetilde{\Phi}$. 所以，如果一个测度在 $\widetilde{\Phi}$ 上定义，那么自然就在任何一个 Φ 上都有定义了.

例 1 假定 X 是一个不空的点集，在 X 中取定一点 P. 对任何 $A\subseteq X$，令

$$\varepsilon_P(A)=\begin{cases}1, & \text{当 } P\in A,\\ 0, & \text{当 } P\notin A,\end{cases}\tag{1.1.2}$$

那么 ε_P 是在 σ 环 $\widetilde{\Phi}$ 上定义的一个测度. ε_P 称为在 P 点的一个**单位质点**，或 **Dirac 测度**.

例 2 X 是一个点集. 对任何 $A\subseteq X$，令

$$o(A)=0,$$

那么 o 是在 σ 环 $\widetilde{\Phi}$ 上定义的测度，叫做**零测度**.

例 3 X 是一个点集. 对任何 $A\subseteq X$，令

$$\mu(A)=\begin{cases}+\infty, & \text{当 } A \text{ 不是空集},\\ 0, & \text{当 } A \text{ 是空集},\end{cases}$$

那么 μ 是一个在 $\widetilde{\Phi}$ 上定义的测度.

例 4 大家熟悉的直线上的 Lebesgue 测度是在由全部 Lebesgue 可测集构成的 σ 环上定义的测度.

下面还要说明测度的几个基本性质.

定理 1.1.2 假定 μ 是一个测度，A 及 B 是两个可测集，$B\subseteq A$，$\mu(A)$及 $\mu(B)$不都等于$+\infty$，也不都等于$-\infty$，那么

$$\mu(A\setminus B)=\mu(A)-\mu(B).$$

证明 因为

$$\mu(A)=\mu(A\setminus B)+\mu(B),$$

移项就得到所要证明的等式. 在定理的假设下，这样的移项是许可的. ▌

定理 1.1.3 假定 μ 是一个测度，存在一个可测集 A，使

$\mu(A)=+\infty$，那么对任何可测集 B，$\mu(B)>-\infty$.

证明 因为 B 是一个可测集，所以

$$\mu(B)=\mu(B\cap A)+\mu(B\setminus A).$$

如果 $\mu(B)=-\infty$，那么 $\mu(B\cap A)$ 及 $\mu(B\setminus A)$ 中至少有一个是 $-\infty$. 若 $\mu(B\cap A)=-\infty$，那么由

$$\mu(A)=\mu(A\cap B)+\mu(A\setminus B)$$

得到矛盾，这是因为等号左边是 $+\infty$，右边却有一项是 $-\infty$. 若 $\mu(B\setminus A)=-\infty$，那么由

$$\mu(A\cup B)=\mu(B\setminus A)+\mu(A)$$

得到矛盾，因为等号右边有一项是 $+\infty$，有一项是 $-\infty$，所以 $A\cup B$ 必定不可测而这跟可测集全体构成 σ 环的假设矛盾. 所以，$\mu(B)>-\infty$. ▌

定理 1.1.4 假定 μ 是一个测度，$\{A_m\}$ 是一列可测集. 如果 $A_m\subseteq A_{m+1}(m=1,2,\cdots)$，那么

$$\mu\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m\Big)=\lim_{m\to\infty}\mu(A_m).$$

如果 $A_m\supseteq A_{m+1}(m=1,2,\cdots)$，而且 $|\mu(A_1)|<+\infty$，那么

$$\mu\Big(\bigcap_{m=1}^{\infty}A_m\Big)=\lim_{m\to\infty}\mu(A_m).$$

证明 先证明定理前半部分. 令 $S=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}A_m$. 如果有一个 A_m 使 $\mu(A_m)=+\infty$，那么由于对任何 $k>m$，

$$\mu(A_k)=\mu(A_k\setminus A_m)+\mu(A_m),$$

必须 $\mu(A_k\setminus A_m)>-\infty$，而 $\mu(A_k)=+\infty$. 因此，$\lim\limits_{m\to\infty}\mu(A_m)=+\infty$. 另一方面，由于

$$\mu(S)=\mu(S\setminus A_m)+\mu(A_m),$$

必须 $\mu(S\setminus A_m)>-\infty$，而 $\mu(S)=+\infty$. 所以所说的等式成立.

同样，如果有一个 A_m，使 $\mu(A_m)=-\infty$，那么等式显然也成立.

再如果所有的 A_m 都满足

$$-\infty < \mu(A_m) < +\infty \quad (m = 1, 2, \cdots),$$

那么由

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots = A_1 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup (A_3 \backslash A_2) \cup \cdots$$

得到

$$\begin{aligned} \mu(S) &= \mu(A_1) + \mu(A_2 \backslash A_1) + \mu(A_3 \backslash A_2) + \cdots \\ &= \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1) + \mu(A_3) - \mu(A_2) + \cdots \\ &= \lim_{m \to \infty} \mu(A_m). \end{aligned}$$

这就是所要求的等式. 注意这里由于假定$\mu(A_m)$有限，所以

$$\mu(A_{m+1} \backslash A_m) = \mu(A_{m-1}) - \mu(A_m).$$

其次证明定理的后半部分. 由于$|\mu(A_1)| < +\infty$，所有的 A_m 都必须满足$|\mu(A_m)| < +\infty$，否则的话，如果有一个 $A_m (m > 1)$，使$|\mu(A_m)| = +\infty$，那么

$$|\mu(A_{m-1})| = |\mu(A_{m-1} \backslash A_m) + \mu(A_m)| = +\infty,$$

因为 $\mu(A_{m-1} \backslash A_m)$不能是跟 $\mu(A_m)$符号相反的无限大. 继续推算下去，最后得到$|\mu(A_1)| = +\infty$，这是不可能的.

既然所有的 A_m 都满足$|\mu(A_m)| < +\infty$，那么由

$$A_1 = \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \right) \cup (A_1 \backslash A_2) \cup (A_2 \backslash A_3) \cup \cdots$$

得到

$$\begin{aligned} \mu(A_1) &= \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \right) + \mu(A_1) - \mu(A_2) + \mu(A_2) - \mu(A_3) + \cdots \\ &= \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \right) + \mu(A_1) - \lim_{m \to \infty} \mu(A_m). \end{aligned}$$

因此得到所要证明的等式. ▌

假定一个测度 μ 在所有的可测集 A 里分布的质量不为负，那么说 μ 是一个**正测度**.

假定 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$ 是在同一个 σ 环 Φ 上定义的测度，$a_1, a_2, \cdots, a_m$ 是实数，而对每个 $A \in \Phi$，$a_1 \mu_1(A), \cdots, a_m \mu_m(A)$这 m 个数值

中不会同时有$+\infty$及$-\infty$，那么可以构造一个新的测度$\mu=\sum_{i=1}^{m}a_i\mu_i$. μ在任何一个$A\in\Phi$分布的质量是$\mu(A)=\sum_{i=1}^{m}a_i\mu_i(A)$. 这个$\mu$称为$\mu_1,\cdots,\mu_m$的**实系数线性组合**. 特别是两个测度$\mu_1,\mu_2$的和$\mu_1+\mu_2$及差$\mu_1-\mu_2(=\mu_1+(-1)\mu_2)$就是在这样的线性组合的定义下理解的.

我们要证明：一个测度必定可以表示为两个正测度的差. 为了这个目的，先说明变差的概念.

假定μ是在σ环Φ上定义的一个测度. 对任何一个$A\in\Phi$，令

$$\mu_+(A)=\sup_{\Phi\ni B\subseteq A}\mu(B), \tag{1.1.3}$$

$$\mu_-(A)=-\inf_{\Phi\ni B\subseteq A}\mu(B). \tag{1.1.4}$$

$\mu_+(A)$及$\mu_-(A)$分别称为μ**在A里的正变差**及**负变差**. 所得到的μ_+及μ_-这两个集函数分别称为μ**的正变差**及**负变差**. 由于空集可测，并且是任何一个可测集A的子集，所以$\mu_+(A)\geqslant0$，$\mu_-(A)\geqslant0$. 因此，测度的正负变差都是非负的集函数.

引理 1 假定μ是一个测度，那么μ_+及μ_-都是正测度.

证明 显然，$\mu_+(\varnothing)=\mu_-(\varnothing)=0<+\infty$，所以只要证明$\mu_+$及$\mu_-$都是绝对可加的就行了.

任意取可列个两两不相交的可测集$A_m(m=1,2,\cdots)$. 令$A=\bigcup_m A_m$.

如果存在一个A_m，使$\mu_+(A_m)=+\infty$，那么当然$\mu_+(A)=+\infty$. 因此

$$\mu_+(A)=\sum_i\mu_+(A_i).$$

如果每个$\mu_+(A_i)<+\infty$，那么任意取定一个正数a以后，对每个i，存在一个可测集$B_i\subseteq A_i$，使

$$\mu_+(A_i)<\mu(B_i)+a/2^i.$$

因此

$$\sum_i \mu_+(A_i) < \sum_i \mu(B_i) + a = \mu\left(\sum_i B_i\right) + a \leqslant \mu_+(A) + a.$$

这表示

$$\sum_i \mu_+(A_i) \leqslant \mu_+(A).$$

另一方面，

$$\mu_+(A) = \sup_{\Phi \ni B \subseteq A} \mu(B) = \sup_{\Phi \ni B \subseteq A} \sum_i \mu(B \cap A_i) \leqslant \sum_i \mu_+(A_i),$$

所以 $\mu_+(A) = \sum_i \mu_+(A_i)$. 因此 μ_+是绝对可加的.

同样，μ_-也是绝对可加的. ▌

为简便起见，如果 A 相对于测度 μ 可测并且 $\mu_+(A)=0$，就称 A 是一个**负集**. 如果 $\mu_-(A)=0$，就称 A 是一个**正集**.

引理 2 假定 μ 是一个测度，A 是一个可测集，那么 A 有正子集 A' 及负子集 A''，使

$$\mu(A') = \mu_+(A), \quad \mu(A'') = -\mu_-(A).$$

证明 只证明 A' 存在，A''存在可以同样证明.

取一列严格增加的实数$\{k_m\}$收敛于 $\mu_+(A)$. 对每个正整数 m，A 有子集 A_m，使

$$k_m < \mu(A_m) \leqslant \mu_+(A).$$

假定 A_m 是正集，那么就把这 A_m 记作 A'_m. 假定 A_m 不是正集，那么任意取一个正数 $h_1 < \mu_-(A_m)$，于是 A_m 有一个子集 S_1，使

$$-\mu_-(A_m) \leqslant \mu(S_1) < -h_1.$$

如果 $A_m \backslash S_1$ 是正集，那么把 $A_m \backslash S_1$ 记作 A'_m，否则取任意一个正数 $h_2 < \mu_-(A_m \backslash S_1)$. 于是 $A_m \backslash S_1$ 有一个子集 S_2，使

$$-\mu_-(A_m \backslash S_1) \leqslant \mu(S_2) < -h_2.$$

如果 $A_m \backslash S_1 \backslash S_2$ 是正集，那么把 $A_m \backslash S_1 \backslash S_2$ 记作 A'_m，否则取任意一个正数 $h_3 < \mu_-(A_m \backslash S_1 \backslash S_2)$. 于是 $A_m \backslash S_1 \backslash S_2$ 有一个子集 S_3 使

$$-\mu_-(A_m \backslash S_1 \backslash S_2) \leqslant \mu(S_3) < -h_3.$$

这样进行下去，或者得到 A_m 的一个正子集 $A'_m = A_m \backslash S_1 \backslash \cdots \backslash S_n$，或

者得到A_m的一列两两不相交的子集$\{S_i\}$，那就令$A'_m = A_m \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$，可以证明$A'_m$是正集.

要证明这事实，由定理1.1.4，只要证明$\lim_{j\to\infty} \mu_-\left(A_m \setminus \bigcup_{i=1}^{j} S_i\right) = 0$就行了. 假如这等式不成立，那么$\overline{\lim_{j\to\infty}}\, \mu_-\left(A_m \setminus \bigcup_{i=1}^{j} S_i\right) > 0$. 于是可以选择前面的$h_j$，使$\lim_{j\to\infty} h_j > 0$，因此会得到

$$k_m < \mu(A_m) = \mu(A'_m) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) < \mu(A'_m) - \sum_{i=1}^{\infty} h_i = -\infty,$$

这是不可能的.

这样得到的正子集A'_m仍旧满足

$$k_m < \mu(A'_m) \leqslant \mu_+(A),$$

因为$\mu(A'_m) \geqslant \mu(A_m)$.

最后，令$A' = \bigcup_{m=1}^{\infty} A'_m$，那么$A'$当然是正集并且对任何一个$m$，

$$\mu_+(A) \geqslant \mu(A') \geqslant \mu(A'_m) > k_m.$$

令$m \to \infty$，就得到$\mu(A') = \mu_+(A)$. ▌

定理 1.1.5 任何一个测度μ可以表示为两个正测度的差，特别是可以表示为

$$\mu = \mu_+ - \mu_-. \tag{1.1.5}$$

证明 由引理2和定理1.1.3知道对任何一个可测集A，$\mu_+(A)$及$\mu_-(A)$不会都是$+\infty$. 因此，$\mu_+ - \mu_-$有意义.

任意取一个可测集A及它的一个子集B，那么

$$\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B) \leqslant \mu(B) + \mu_+(A),$$

$$\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B) \geqslant \mu(B) - \mu_-(A).$$

在上一个不等式中取B，使$\mu(B)$任意接近于$-\mu_-(A)$，在下一个不等式中取B，使$\mu(B)$任意接近于$\mu_+(A)$. 那么得到

$$\mu_+(A) - \mu_-(A) \leqslant \mu(A) \leqslant \mu_+(A) - \mu_-(A).$$

所以，$\mu=\mu_+-\mu_-$. ▌

定理 1.1.5 中的(1.1.5)称为测度 μ 的 **Jordan 分解**. 当然，假定 ν 是一个正测度，与 μ 在同一个 σ 环 Φ 上定义，并且对任何 $A\in\Phi$，$\nu(A)<+\infty$，那么

$$\mu=(\mu_++\nu)-(\mu_-+\nu).$$

由于 $\mu_+-\nu$ 及 $\mu_-+\nu$ 也是两个正测度，因此 Jordan 分解并不是分解成两个正测度差的唯一的办法.

还可以证明

定理 1.1.6 假定 μ 是一个测度，在一个由空间 X 的子集构成的 σ 环上定义，那么 $X=A\cup B$，这里 A 的可测子集都是正集，B 的可测子集都是负集.

证明 由定理 1.1.3，不妨假定对所有的可测集 E，$-\infty<\mu(E)\leqslant+\infty$ 成立.

把 μ 在所有负集里分布的质量的下确界记作 b，那么存在一列负集 $\{E_m\}$，使

$$\lim_{m\to\infty}\mu(E_m)=b.$$

令 $B=\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m$，那么 B 是负集. 我们证明 $A=X\setminus B$ 的任何可测子集是正集. 假如不然，那么存在可测集 $E\subseteq A$ 使 $\mu(E)<0$. 由引理 2，E 有负子集 E''，使 $\mu(E'')=-\mu_-(E)\leqslant\mu(E)<0$. 这样一来，$B\cup E''$ 是一个负集. 可是

$$\mu(B\cup E'')=\mu(B)+\mu(E'')<\mu(B)=b,$$

这是不可能的. 因此，A 的任何可测子集都是正集. ▌

定理 1.1.6 里的 $X=A\cup B$ 称为 X 相对于 μ 的 **Hahn 分解**.

习　题

1. 假定 Φ 是一个 σ 环，$E_m\in\Phi(m=1,2,\cdots)$，那么 $\bigcap_{m=1}^{\infty}E_m\in\Phi$.

2. 证明直线上的 Lebesgue 可测集(包括测度是$+\infty$的集)全体构成 σ 环.

3. 假定 μ 是一个正测度,$\{E_m\}$是一列可测集,那么

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m\right)\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\mu(E_m).$$

4. 假定 μ 是一个正测度,$\{E_m\}$是一列可测集,令

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}E_m=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=k}^{\infty}E_m,$$

$$\underline{\lim_{m\to\infty}}E_m=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{m=k}^{\infty}E_m,$$

那么 $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}E_m$ 及$\underline{\lim\limits_{m\to\infty}}E_m$ 可测,并且

$$\mu\left(\underline{\lim_{m\to\infty}}E_m\right)\leqslant\underline{\lim_{m\to\infty}}\mu(E_m).$$

特别,当 $\mu\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}E_m\right)<+\infty$ 的时候,

$$\mu\left(\overline{\lim_{m\to\infty}}E_m\right)\geqslant\overline{\lim_{m\to\infty}}\mu(E_m).$$

又如果 $\underline{\lim\limits_{m\to\infty}}E_m=\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}E_m$, 那么这相同的点集记作 $\lim\limits_{m\to\infty}E_m$. 证明:对任意测度$\mu$(不一定是正测度),只要$\{E_m\}$可测,$\lim\limits_{m\to\infty}E_m$存在,并且$\left|\mu\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}E_m\right)\right|<+\infty$, 那么

$$\lim_{m\to\infty}\mu(E_m)=\mu\left(\lim_{m\to\infty}E_m\right).$$

说明定理 1.1.4 是这个事实的特殊情形.

§1.2 积　　分

以后凡是实函数都可以取$+\infty$或者$-\infty$,或者任何一个实数当函数值,除非有另外的声明.

假定 μ 是一个正测度,$f(P)$是定义在一个可测集 E 里的实函数.如果对任何实数 a,$\{P\,|\,f(P)>a\}$可测,那么说 f **可测**(相对于

μ).

正像 Lebesgue 测度及 Lebesgue 积分是紧紧相连的概念，我们前一节所定义的这种大大推广了的测度概念也有相应的一般的积分概念，而且 Lebesgue 积分理论毫无困难地就可以推广到这种一般的积分上来. 我们扼要地说明如下：

定义 假定 μ 是一个正测度，f 是一个在可测集 E 里定义的非负的可测实函数，那么

$$\sup \sum_{i=1}^{m} v_i \mu(e_i) \tag{1.2.1}$$

叫做 **f 关于 μ 的积分**，这里每个 e_i 是可测集，$\bigcup_{i=1}^{m} e_i = E$，当 $i \neq j$ 时 $e_i \cap e_j = \varnothing$，$v_i = \inf\limits_{P \in e_i} f(P)$，而sup 是关于所有的正整数 m 及所有可能的可测集组 $e_1, \cdots, e_m$ 取的.

f 关于 μ 的积分记作

$$\int_E f(P) \mathrm{d}\mu(e_P) \quad 或者 \quad \int_E f \mathrm{d}\mu. \tag{1.2.2}$$

假定不致于引起误会的话，为简单一点有时 E 也不注明了.

当 μ 是一般的(不一定是正的)测度，f 是可测的实函数时，我们令

$$f_+(P) = \sup(f(P), 0) \geqslant 0,$$
$$f_-(P) = -\inf(f(P), 0) \geqslant 0,$$

那么 $f = f_+ - f_-$. 于是定义 **f 关于 μ 的积分**是

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int f_+ \mathrm{d}\mu_+ - \int f_+ \mathrm{d}\mu_- - \int f_- \mathrm{d}\mu_+ + \int f_- \mathrm{d}\mu_-,$$

假定等号右边不同时出现 $+\infty$ 及 $-\infty$ 的话.

当 $\left|\int_E f \mathrm{d}\mu\right| < +\infty$ 时，我们说 **f 关于 μ 在 E 上可积分**，或 **μ 可积分**.

例 1 假定 ε_{P_0} 是空间 X 里在 P_0 点的一个单位质点，f 是在 X 里定义的一个任意的非负的实函数，那么由于 ε_{P_0} 的特点，X 的

任何子集可测，因此 f 也可测.

假定 $e_1,\cdots,e_m$ 是互不相交的可测集并且 $\bigcup_{i=1}^{m} e_i = X$. 不妨假定 $P_0 \in e_1$，那么

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \varepsilon_{P_0}(e_i) = v_1 \varepsilon_{P_0}(e_1) = v_1 \leqslant f(P_0).$$

因此

$$\int_X f \mathrm{d}\varepsilon_{P_0} \leqslant f(P_0).$$

但是另一方面，取 $e_1 = \{P_0\}$，那么 $v_1 = f(P_0)$，因此

$$\int_X f \mathrm{d}\varepsilon_{P_0} \geqslant f(P_0).$$

因此

$$\int_X f \mathrm{d}\varepsilon_{P_0} = f(P_0). \tag{1.2.3}$$

可以证明，f 不是非负的时候也一样.

这例子说明：一个函数在一点 P_0 取值是对这个函数的一个积分运算. 从这里可以看出在一般的测度概念上建立起来的积分概念的广泛性.

为了获得关于积分的更多的认识，我们给出下面的一些定理.

定理 1.2.1 假定 $f(P)$ 及 $g(P)$ 是两个可测函数，a 及 b 是两个实常数，那么 $|f(P)|^a$，$af(P)+bg(P)$ 及 $f(P)g(P)$ 都可测.

证明 由可测的定义就可以证明. ▌

定理 1.2.2 假定 $\{f_n(P)\}$ 是一列可测函数，那么 $\sup_n f_n(P)$，$\inf_n f_n(P)$，$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(P)$ 及 $\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(P)$ 都可测.

证明 因为对任何实常数 c，

$$\{P \mid \sup_n f_n(P) > c\} = \bigcup_n \{P \mid f_n(P) > c\}.$$

$\{P \mid f_n(P) > c\}$ 是可测集，所以 $\bigcup_n \{P \mid f_n(P) > c\}$ 是可测集，因此 $\sup_n f_n(P)$ 可测. 由于 $\inf_n f_n(P) = -\sup_n(-f_n(P))$，所以 $\inf_n f_n(P)$

也可测.

因为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(P) = \lim_{n\to\infty}(\sup_{k\geqslant n} f_k(P)) = \inf_n(\sup_{k\geqslant n} f_k(P)),$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(P) = -\overline{\lim_{n\to\infty}}(-f_n(P)),$$

所以也都是可测的. ▌

引理 1 假定 μ 是一个测度,$\{f_n(P)\}$是定义在一个可测集 E 上的一列有限可测函数,在 E 上收敛于一个有限可测函数 $f(P)$. 再假定 $\mu(E)$有限,那么对任何两个正数 ε 和 δ,存在一个正整数 N 及一个可测集 H,$|\mu(H)|<\delta$,使下面式子对每个正整数 $n>N$ 及每一点 $P\in E\backslash H$ 成立:

$$|f_n(P)-f(P)|<\varepsilon.$$

证明 令

$$\begin{aligned} E_m &= \{P \mid |f_n(P)-f(P)|<\varepsilon,\ n>m\} \\ &= \bigcap_{n=m+1}^{\infty}\{P \mid |f_n(P)-f(P)|<\varepsilon\}, \end{aligned}$$

其中 $m=0,1,\cdots$,那么 E_m 是可测集,而且 $E_0\subseteq E_1\subseteq\cdots$, $\bigcup_{m=0}^{\infty}E_m = E$. 所以

$$\mu(E)=\lim_{m\to\infty}\mu(E_m).$$

因此存在一个正整数 N,使$|\mu(E)-\mu(E_N)|=|\mu(E\backslash E_N)|<\delta$. 取 $H=E\backslash E_N$,就符合引理的要求. ▌

假定 μ 是一个正测度,E 是一个点集,$H\subseteq E$,$\mu(H)=0$,点集 H 就称为相对于 μ 的**零集**. 如果某一个事实对每一点 $P\in E\backslash H$ 成立,就说这事实在 E 上相对于 μ **几乎处处成立**.

定理 1.2.3(Egoroff 定理) 假定 μ 是一个正测度,E 是一个可测集,$\mu(E)$有限. 再假定$\{f_n(P)\}$是一列有限可测函数,在 E 上相对于 μ 几乎处处收敛于一个有限可测函数 $f(P)$,那么对任何一个正数 a,存在一个点集 $S\subseteq E$,$\mu(S)\geqslant\mu(E)-a$,而$\{f_n(P)\}$在

S 上一致收敛于 $f(P)$.

证明 由前面的引理，对每一个正数 a 及每一个正整数 m，存在一个集合 $H_m \subseteq E$，$\mu(H_m) < a/2^m$. 还存在一个正整数 N_m，使当 $n > N_m$，$P \in E \setminus H_m$ 时，

$$|f_n(P) - f(P)| < \frac{1}{2^m}.$$

取 $S = E \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m$，那么 $\{f_n(P)\}$ 在 S 上一致收敛，而且

$$\mu(E) - \mu(S) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu(H_m) \leqslant a. \quad \blacksquare$$

一个定义在点集 E 上的函数 $f(P)$ 如果只取到有限个不同的数值 $v_1, \cdots, v_n$，那么说它是 E 上的一个**简单函数**. 假定 $\{P \mid f(P) = v_i\} = E_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，那么就把 $f(P)$ 写成 $f(P) = \{v_1, E_1, \cdots, v_n, E_n\}$. 简单函数是证明积分的一些基本性质的重要工具.

定理 1.2.4 一个在点集 E 上非负的可测函数 $f(P)$ 是 E 上一列单调不减的非负简单函数 $\{f_n(P)\}$ 的极限.

证明 取下列 $f_n(P)$ 就可以了：

$$f_n(P) = \begin{cases} \dfrac{i-1}{2^n}, & \text{当 } P \in \left\{P \,\middle|\, \dfrac{i-1}{2^n} \leqslant f(P) < \dfrac{i}{2^n}\right\}, \\ & \qquad 1 \leqslant i \leqslant 2^n n, \\ n, & \text{当 } P \in \{P \mid f(P) \geqslant n\}. \end{cases} \quad \blacksquare$$

定理 1.2.5 假定 μ 是一个测度，$g = \{v_1, E_1, \cdots, v_n, E_n\}$ 是点集 $E = E_1 \cup \cdots \cup E_n$ 上的一个简单函数，这里 $E_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是可测集，那么

$$\int_E g \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} v_i \mu(E_i).$$

证明 不妨假定 $g \geqslant 0$，$\mu \geqslant 0$. 再假定 $X_1, \cdots, X_m$ 是任意一组互不重迭的可测集，$X_1 \cup \cdots \cup X_m = E$，那么当 $E_i \cap X_j \neq \varnothing$ 的时候，令

$$w_j = \inf_{P \in X_j} g \leqslant v_i.$$

所以

$$\sum_{j=1}^{m} w_j\mu(X_j) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} w_j\mu(E_i \cap X_j)$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} v_i\mu(E_i \cap X_j) = \sum_{i=1}^{n} v_i\mu(E_i). \quad \blacksquare$$

引理 2 假定 μ 是一个正测度，$\{g_n(P)\}$ 是点集 E 上一列单调不减的非负的简单可测函数，收敛于函数 $g(P)$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(P)\mathrm{d}\mu = \int_E g(P)\mathrm{d}\mu. \tag{1.2.4}$$

证明 先假定 $\mu(E)<+\infty$.

由定理 1.2.2，$g(P)$ 可测、非负，而且由假设，

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(P)\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g(P)\mathrm{d}\mu. \tag{1.2.5}$$

另外一方面，假定 $E_1,\cdots,E_n$ 是一组互不重迭的可测集，$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E$，而且令 $v_i = \inf_{P\in E_i} g(P)$ 时，有 $v_1 < v_2 < \cdots < v_n$. 定义

$$v(P) = \{v_1, E_1, \cdots, v_n, E_n\},$$

那么 $g(P)\geqslant v(P)$. 根据引理 1，对于任何正数 ϵ 和 δ，存在一个正整数 m_0 及可测集 $H(\mu(H)<\delta)$，使当 $m>m_0$，$P\in E\backslash H$ 时，

$$g(P)\geqslant g_m(P) \geqslant g(P) - \varepsilon$$

$$\geqslant v(P) - \varepsilon,$$

因此

$$\int_E g_m(P)\mathrm{d}\mu \geqslant \int_{E\backslash H} g_m(P)\mathrm{d}\mu \geqslant \int_{E\backslash H} v(P)\mathrm{d}\mu - \int_{E\backslash H}\varepsilon\mathrm{d}\mu$$

$$\geqslant \int_E v\mathrm{d}\mu - v_n\mu(H) - \varepsilon\mu(E\backslash H)$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} v_i\mu(E_i) - \varepsilon v_n - \varepsilon\mu(E\backslash H).$$

所以

$$\lim_{m\to\infty}\int_E g_m(P)\mathrm{d}\mu \geqslant \sum_{i=1}^{n} v_i\mu(E_i).$$

因此

$$\lim_{m\to\infty}\int_E g_m(P)\mathrm{d}\mu \geqslant \int_E g(P)\mathrm{d}\mu. \tag{1.2.6}$$

由(1.2.5)及(1.2.6)得到(1.2.4).

$\mu(E)=+\infty$的情况请读者自己证明. ▌

由引理 1 和 2,可以利用简单函数的积分的一些性质来证明一般函数的积分具有同样的性质. 对于简单函数,这些性质可以由定理 1.2.5 直接推出. 于是得到

定理 1.2.6 假定 μ 是一个正测度,E 是可测集,$f(P)$及 $g(P)$这两个函数在 E 上关于 μ 可积分,那么

$$\int_E (af(P)+bg(P))\mathrm{d}\mu = a\int_E f(P)\mathrm{d}\mu + b\int_E g(P)\mathrm{d}\mu,$$

这里 a 及 b 是两个常数. 又假定 $f(P)$在可测集 F 上 μ 可积分,而 $\mu(E\cap F)=0$,那么

$$\int_{E\cup F} f(P)\mathrm{d}\mu = \int_E f(P)\mathrm{d}\mu + \int_F f(P)\mathrm{d}\mu.$$

定理 1.2.7 假定 μ 是一个正测度.

(1) 如果 $\mu(E)=0$,那么任何一个可测函数在 E 上关于 μ 的积分等于 0.

(2) 假定两个 μ 可积分函数 $f(P)$及 $g(P)$在一个可测集 E 上相对于 μ 几乎处处相等,那么它们关于 μ 的积分相等. 假定几乎处处有 $f(P)\leqslant g(P)$,那么

$$\int_E f(P)\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g(P)\mathrm{d}\mu.$$

证明 (1)由积分定义就知道. (2)是(1)及定理 1.2.6 的推论. ▌

定理 1.2.8 假定 μ 是一个正测度,E 是一个可测集,$\mu(E)$有限. 再假定$\{g_n(P)\}$是一列 μ 可积分函数,在 E 里一致收敛于

$g(P)$，那么 $g(P)$ 相对于 μ 可积分，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(P)\mathrm{d}\mu = \int_E g(P)\mathrm{d}\mu.$$

证明 由于 $|g(P)-g_n(P)|$ 有界可测，所以可积分. 所以 $g(P)-g_n(P)$ 是 μ 可积分的. 由此，$g(P)=(g(P)-g_n(P))+g_n(P)$ 是 μ 可积分的. 于是，当 $n\to\infty$ 时，

$$\left|\int_E g_n(P)\mathrm{d}\mu - \int_E g(P)\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_E |g(P)-g_n(P)|\mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant \sup_{P\in E}|g(P)-g_n(P)|\mu(E)\to 0. \quad \blacksquare$$

定理 1.2.9（Lebesgue 定理） 假定 μ 是一个正测度，$\{f_n(P)\}$ 是可测集 E 上一列单调不减的非负可测函数，收敛于 $f(P)$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(P)\mathrm{d}\mu = \int_E f(P)\mathrm{d}\mu.$$

证明 因为对任何正整数 m，

$$\int_E f\mathrm{d}\mu \geqslant \int_E f_m\mathrm{d}\mu,$$

所以

$$\int_E f\mathrm{d}\mu \geqslant \lim_{m\to\infty}\int_E f_m\mathrm{d}\mu.$$

另一方面，对每一个 f_n，存在一列不减的可测非负的简单函数 $\{g_n^k(P)\}$ 收敛于 f_n. 不妨假定 $g_n^k\leqslant g_{n+1}^k\,(n=1,2,\cdots)$，那么 $g_k^k\leqslant g_{k+1}^{k+1}\,(k=1,2,\cdots)$. 于是

$$f_n(P) = \lim_{k\to\infty} g_n^k(P) \leqslant \lim_{k\to\infty} g_k^k(P) \leqslant f(P).$$

令 $n\to\infty$，得 $\lim\limits_{k\to\infty} g_k^k(P) = f(P)$. 于是由引理 2 得定理 1.2.9. $\blacksquare$

定理 1.2.10（Fatou 引理） 假定 μ 是一个正测度，E 是可测集. 再假定 $\{f_n(P)\}$ 是 E 上一列可测的非负函数，那么

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(P)\mathrm{d}\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(P)\mathrm{d}\mu.$$

证明 因为

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(P) = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{m\geqslant n} f_m(P)\right),$$

所以由定理 1.2.9 得到

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(P)\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E \inf_{m\geqslant n} f_m(P)\mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(P)\mathrm{d}\mu. \quad ▌$$

定理 1.2.11(Lebesgue) 假定 μ 是一个正测度,E 是可测集,$h(P)$是在 E 上 μ 可积分的函数. 再假定$\{f_n(P)\}$是一列可测函数,$|f_n(P)|\leqslant h(P)(n=1,2,\cdots)$,那么

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu \geqslant \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n\mathrm{d}\mu,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E \varlimsup_{n\to\infty} f_n\mathrm{d}\mu.$$

此外,如果$\{f_n(P)\}$又收敛于一个函数 $f(P)$,那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu = \int_E f\mathrm{d}\mu.$$

证明 由定理 1.2.10,

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_E (h+f_n)\mathrm{d}\mu \geqslant \int_E (h+\varliminf_{n\to\infty} f_n)\,\mathrm{d}\mu,$$

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_E (h-f_n)\mathrm{d}\mu \geqslant \int_E (h-\varlimsup_{n\to\infty} f_n)\,\mathrm{d}\mu.$$

由这两个不等式就得到定理 1.2.11. ▌

习 题

1. 假定 μ 是一个测度,f 相对于 μ 可测,那么 f 相对于 μ 可积分的充分而且必要的条件是$|f|$相对于 μ 可积分.

2. 用 λ 表示直线上的 Lebesgue 测度,f 是一个 Lebesgue 可积分函数. 对直线上每个 Lebesgue 可测集 e 定义 μ 如下:

$$\mu(e) = \int_e f\mathrm{d}\lambda,$$

那么 μ 是一个测度.

3. 假定 μ 是一个正测度,f,g 及 h 是定义在同一个可测集 E

上的可测函数. 再假定 $|f|^p$, $|g|^q$ 及 $|h|^p$ 可积分,这里 $p>1$, $q>1$, $1/p+1/q=1$,那么下列不等式成立: Hölder 不等式

$$\left|\int_E fg\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \left(\int_E |f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int_E |g|^q\mathrm{d}\mu\right)^{1/q};$$

Minkowski 不等式

$$\left(\int_E |f+h|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_E |f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} + \left(\int_E |h|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}.$$

什么时候等号成立?

提示 先假定 $\int_E |f|^p\mathrm{d}\mu > 0$, $\int_E |g|^q\mathrm{d}\mu > 0$. 令 $a = |f|\Big/\left(\int_E |f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$, $b = |g|\Big/\left(\int_E |g|^q\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}$, $t = a^{1/q}/b^{1/p}$. 然后由不等式 $t^p/p + t^{-q}/q \geqslant 1$, 证明 Hölder 不等式.

§1.3 不定积分及绝对连续测度

前两节已经在一般的点集及测度的概念上得到了积分概念及它的基本性质,这表示古典的 Lebesgue 积分理论完全可以在更广泛的基础上建立. 不过前面所推广的还只限于"定积分"的理论,这一节要推广古典的关于不定积分的理论.

也像 Lebesgue 理论一样,关键性的概念是"绝对连续性".

定义 1 假定 μ 及 ν 是在同一个 σ 环 Φ 上定义的测度,对任何使 $|\mu|(e)=\mu_+(e)+\mu_-(e)=0$ 成立的 $e\in\Phi$,都有 $\nu(e)=0$ 成立,那么说 ν 关于 μ **绝对连续**.

$|\mu|(e)=\mu_+(e)+\mu_-(e)$称作 e 里的**绝对质量**或者 μ 在 e 里的**全变差**.

由 §1.1 的 Hahn 分解(或者 §1.1 引理 2)知道 ν 绝对连续跟 ν_+ 及 ν_- 都绝对连续是等价的,也跟 $|\nu|$ 绝对连续等价.

定义 2(σ **有限**) 假定在一个测度 μ 下,一个可测集 e 是可列个绝对质量有限的可测子集的和集,那么说 e、或者说 e 里的质量、

或者 e 的测度是 σ **有限的**(相对于 μ). 如果在测度 μ 下,任何一个可测集是 σ 有限的,那么说 μ 是 σ **有限的**.

如果 Φ 是由空间 X 的子集组成的 σ 环,$X\in\Phi$①,那么在 Φ 定义的一个 σ 有限的测度称作是**总质量 σ 有限的**(简称**总 σ 有限的**).

引理 1 假定 μ 及 ν 是总质量有限的正测度,ν 不是零测度,ν 关于 μ 绝对连续,那么存在一个正数 c 及一个可测集 A,使 $\mu(A)>0$,并且 $(\nu-c\mu)_-(A)=0$.

证明 相对于测度 $\nu-\frac{1}{n}\mu(n=1,2,\cdots)$,作 Hahn 分解 $X=A_n\cup B_n$. 令

$$A_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\quad B_0=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n.$$

那么由

$$0\leqslant\nu(B_0)\leqslant\frac{1}{n}\mu(B_0)\quad(n=1,2,\cdots),$$

得到 $\nu(B_0)=0$. 所以 $\nu(A_0)>0$. 又由 ν 的绝对连续性得到 $\mu(A_0)>0$. 因此,至少存在一个 n 使 $\mu(A_n)>0$. 就取 $c=1/n$,$A=A_n$ 好了. ▍

现在可以证明类似于古典的微积分基本定理的下述定理.

定理 1.3.1(Radon-Nikodym) 假定 μ 是一个总质量 σ 有限的正测度,ν 是一个总质量 σ 有限的测度,那么 ν 关于 μ 绝对连续的充分而且必要的条件是存在一个有限的可测函数 f,使对任何可测集 $E\subset X$,

$$\nu(E)=\int_E f\mathrm{d}\mu,$$

f 在几乎处处相等(相对于 μ)的意义下是唯一的.

证明 充分性是显然的,只证明必要性. 由于 σ 有限性的定义,不妨假定 μ 及 ν 都是总质量有限的正测度.

---

① 满足这条件的 σ 环也叫 σ **代数**.

令

$$\Delta=\left\{f\left|\begin{array}{l}f\text{ 是 }\mu\text{ 可积函数,并且对于任何}\\ \text{可测集 }E,\ \int_E f\mathrm{d}\mu\leqslant\nu(E)\end{array}\right.\right\},$$

$$b=\sup_{f\in\Delta}\int_X f\mathrm{d}\mu,$$

那么存在一列 $f_m\in\Delta$ 使 $\lim\limits_{m\to\infty}\int_X f_m\mathrm{d}\mu=b$. 现在令

$$f_0=\sup f_n(P),$$

那么 $\int_X f_0\mathrm{d}\mu\geqslant b$. 可是 $f_0\in\Delta$,所以 $\int_X f_0\mathrm{d}\mu=b$. f_0 是可积分的(相对于 μ),所以存在一个有限的可积分函数 f 几乎处处等于 f_0(相对于 μ).

定义一个测度 ν_0 如下:对任何可测集 E,

$$\nu_0(E)=\nu(E)-\int_E f\mathrm{d}\mu.$$

只要证明 ν_0 是零测度就行了. 事实上,ν_0 当然是正测度. 如果不是零测度,那么由引理 1,存在一个正数 c 和一个可测集 A 使 $\mu(A)>0$,并且对任何可测集 E,

$$c\mu(E\cap A)\leqslant\nu_0(E\cap A)=\nu(E\cap A)-\int_{E\cap A}f\mathrm{d}\mu.$$

令 $g=f+c\chi_A$,这里 χ_A 表示 A 的特征函数,即

$$\chi_A(P)=\begin{cases}1, & P\in A,\\ 0, & P\notin A,\end{cases}$$

那么对任何可测集 E,

$$\begin{aligned}\int_E g\mathrm{d}\mu&=\int_E f\mathrm{d}\mu+c\mu(E\cap A)\\ &\leqslant\int_{E\setminus A}f\mathrm{d}\mu+\nu(E\cap A)\leqslant\nu(E).\end{aligned}$$

因此,$g\in\Delta$. 但是另外一方面

$$\int_X g\mathrm{d}\mu=\int_X f\mathrm{d}\mu+c\mu(A)>b.$$

这是矛盾的. ▌

定理 1.3.1 里的 f 往往表示成"导数"的形式:

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

这种导数显然服从通常的规律,例如假定 $\nu_1, \nu_2, \nu_1+\nu_2, \mu$ 都是总质量 σ 有限的测度, $\mu \geqslant 0$, ν_1 及 ν_2 关于 μ 绝对连续,那么下列式子相对于 μ 几乎处处成立:

$$\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}.$$

此外还有

定理 1.3.2 假定 λ 及 μ 都是总质量 σ 有限的正测度,并且 μ 关于 λ 绝对连续,又假定 ν 是关于 μ 绝对连续的总质量 σ 有限的测度,那么下列式子相对于 λ 几乎处处成立:

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\lambda}.$$

证明 不妨假定 ν 也是正测度,于是

$$\frac{d\nu}{d\mu} = f, \quad \frac{d\mu}{d\lambda} = g$$

都可以假定是非负的. 因此可以造一列单调增加的非负可测简单函数 $\{f_m\}$ 收敛于 f. 于是对任何可测集 E,

$$\lim_{m\to\infty}\int_E f_m d\mu = \int_E f d\mu,$$
$$\lim_{m\to\infty}\int_E f_m g d\lambda = \int_E f g d\lambda. \tag{1.3.1}$$

因为 f_m 是可测集的特征函数的线性组合,而对每个可测集 F 的特征函数 χ_F,

$$\int_E \chi_F \, d\mu = \mu(E \cap F) = \int_{E\cap F} g d\lambda = \int_E \chi_F g \, d\lambda.$$

所以得到

$$\int_E f_m d\mu = \int_E f_m g d\lambda. \tag{1.3.2}$$

由(1.3.1)及(1.3.2)得到

$$\int_E f\mathrm{d}\mu = \int_E fg\mathrm{d}\lambda. \quad \blacksquare$$

定理 1.3.2 也可以写成下面的形式：

定理 1.3.2′ 假定 λ 及 μ 是总质量 σ 有限的正测度，μ 关于 λ 绝对连续，f 是有限可测函数并且对任何可测集 E，$\int_E f\mathrm{d}\mu$ 不是 $\infty-\infty$，那么

$$\int_E f\mathrm{d}\mu = \int_E f\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda.$$

证明 对任何可测集 E，定义 $\nu(E)=\int_E f\mathrm{d}\mu$. 由定理 1.3.1，$\nu$ 关于 μ 绝对连续. 所以由定理 1.3.2 得到定理 1.3.2′. $\blacksquare$

§1.4 乘积测度及 Fubini 定理

现在考虑在一般的积分概念下的二重积分的次序交换的问题，即 Fubini 定理的推广问题. 当然先得说清楚一些有关的基本概念.

假定 X 和 Y 是两个点集. 由任何一点 $P\in X$ 和任何一点 $Q\in Y$ 组成的点对 (P,Q) 的全体叫做 X 及 Y 的 **Descartes 乘积**或者简称**乘积**，记作 $X\times Y$. 取这个名字是由于平面解析几何学中的 Descartes 坐标法. 不难看到，这种坐标法实质上就是把平面看成两条坐标轴的乘积.

假定 $A\subseteq X$，$B\subseteq Y$，那么 $A\times B$ 称为 $X\times Y$ 的**子乘积集**. $X\times Y$ 的子集不一定是子乘积集.

假定 $E\subseteq X\times Y$，那么对固定的 $P\in X$，我们把 $\{Q\mid(P,Q)\in E\}$ 叫做 E 的一个 X **截**，记为 E_P. 当然，$E_P\subseteq Y$. 另外，对固定的 $Q\in Y$，把 $\{P\mid(P,Q)\in E\}$ 叫做 E 的一个 Y **截**，记为 E^Q. 当然，$E^Q\subseteq X$.

我们把包含一族集合的最小的 σ 环称为这个族**所繁殖的** σ

环,它实际上是一切包含这一族集合的 σ 环的公共部分,因为无论有限个或者无限个 σ 环的公共部分还是 σ 环.

现在假定 Φ 和 Ψ 分别是由 X 和 Y 的子集组成的 σ 环,那么由所有的 $A\in\Phi$ 和 $B\in\Psi$ 的乘积 $A\times B$ 所繁殖的 σ 环记为 $\Phi\times\Psi$.

引理 1 假定 $E\in\Phi\times\Psi$,那么对任何 $P\in X,Q\in Y$,有

$$E_P\in\Psi,\quad E^Q\in\Phi. \tag{1.4.1}$$

证明 把所有的 $P\in X$ 及 $Q\in Y$ 满足 $E_P\in\Psi$ 及 $E^Q\in\Phi$ 的点集 $E(\subseteq X\times Y)$ 的全体记作 Ω,那么 Ω 是一个 σ 环. 事实上,如果 $E\in\Omega,F\in\Omega$,那么 $(E\backslash F)_P=E_P\backslash F_P\in\Psi,(E\backslash F)^Q=E^Q\backslash F^Q\in\Phi$,所以 $E\backslash F\in\Omega$. 此外,如果 $E_m\in\Omega(m=1,2,\cdots)$,那么

$$(\bigcup E_m)_P=\bigcup (E_m)_P\in\Psi,$$

$$(\bigcup E_m)^Q=\bigcup (E_m)^Q\in\Phi,$$

所以 $(\bigcup E_m)\in\Omega$.

其次,如果 $A\in\Phi,B\in\Psi$,那么 $A\times B\in\Omega$,因为

$$(A\times B)_P=B\in\Psi,\quad (A\times B)^Q=A\in\Phi. \tag{1.4.2}$$

所以由 $\Phi\times\Psi$ 的定义知道 $\Phi\times\Psi\subseteq\Omega$,也就是任何 $E\in\Phi\times\Psi$ 都满足 $E_P\in\Psi$ 及 $E^Q\in\Phi$ 这两个性质. ▌

有了 σ 环的"乘积"以后,我们还要说明"乘积测度"的概念. 先证明两个引理.

假定 Δ 是空间 Z 的一族子集,符合下面的条件:

(1) 如果 $A\in\Delta,B\in\Delta$,那么 $A\backslash B\in\Delta$;

(2) 如果 $A\in\Delta,B\in\Delta$,那么 $A\cup B\in\Delta$,

就说 Δ 是由 Z 的子集组成的一个**环**.

称作环当然是由于代数的习惯. 关于点集,其交集与和集一向是当作乘积与和来看的,而(1)实际上是 $A\backslash B=A\cap C(B)\in\Delta$ 的意思. 可以看到,σ 环是把(2)所规定的加法扩大到可列个点集的加法后得到的概念. 所以,σ 环是环的特殊情形.

引理 2 假定 Δ 是由空间 Z 的子集组成的环,Θ 是 Z 的一族子集,有下面的性质:

(1) $\Theta \supseteq \Delta$;

(2) 如果$\{E_m\}$是 Θ 中一个单调列，就有 $\lim\limits_{m\to\infty} E_m \in \Theta$，

那么 Δ 所繁殖的 σ 环 $\Phi \subseteq \Theta$.

证明 下文凡是说一族点集 Ω 有性质(1)或(2)的时候，上面(1)或(2)的条文里的 Θ 应该相应地改作 Ω 来理解.

把一切有性质(1)及(2)的点集族的公共部分记作 Θ_0，那么我们只用证明 $\Phi \subseteq \Theta_0$. 显然，Θ_0 有性质(1)及(2). 由 Φ 的定义及 Θ_0 的性质(1)，只要证明 Θ_0 是 σ 环就行了. 再由 Θ_0 的性质(2)，我们就只用证明：

(*) 如果 $E \in \Theta_0$，$F \in \Theta_0$，那么 $E \cup F \in \Theta_0$，$E \backslash F \in \Theta_0$.

令

$$\Theta_1 = \{E \mid E \in \Theta_0, \text{并且对任何 } F \in \Delta \text{ 都有 } E \cup F \in \Theta_0\},$$

那么 Θ_1 有性质(1). 再证明 Θ_1 有性质(2). 事实上，假定$\{E_m\}$是一个单调列，并且 $E_m \in \Theta_1$，那么由 Θ_1 的定义，$\{E_m \cup F\} \subseteq \Theta_0$. 由 Θ_0 的性质(2)知道

$$\lim_{m\to\infty} (E_m \cup F) \in \Theta_0,$$

即

$$F \cup \lim_{m\to\infty} E_m \in \Theta_0.$$

因此，由 Θ_1 的定义知道 $\lim\limits_{m\to\infty} E_m \in \Theta_1$. 所以 Θ_1 有性质(2). 由 Θ_0 的极小性，$\Theta_0 \subseteq \Theta_1$. 但是由 Θ_1 的定义，$\Theta_1 \subseteq \Theta_0$. 因此，$\Theta_0 = \Theta_1$，也就是说，如果 $E \in \Theta_0$，$F \in \Delta$，那么 $E \cup F \in \Theta_0$.

再令

$$\Theta_2 = \{E \mid E \in \Theta_0, \text{并且对任何 } F \in \Theta_0 \text{ 都有 } E \cup F \in \Theta_0\}.$$

由前一段的结论知道 $\Delta \subseteq \Theta_2$，即 Θ_2 有性质(1). 跟前一段完全同样可以看到 Θ_2 有性质(2)，因此 $\Theta_0 \subseteq \Theta_2$. 因此 $\Theta_2 = \Theta_0$，也就是说(*)结论的前半部分成立.

为了证明(*)结论的后半部分，令

$$\Theta_3 = \{E \mid E \in \Theta_0, \text{并且对任何 } F \in \Delta \text{ 都有 } F \backslash E \in \Theta_0\},$$

那么容易看到 Θ_3 有性质(1)，也可以证明 Θ_3 有性质(2). 事实上，

假定$\{E_m\}\subseteq\Theta_3$是一个单调列，那么由Θ_0的性质(2)，

$$F\setminus\lim_{m\to\infty}E_m=\lim_{m\to\infty}(F\setminus E_m)\in\Theta_0,$$

于是$\lim\limits_{m\to\infty}E_m\in\Theta_3$. 因此，$\Theta_3=\Theta_0$.

类似地，可以依次证明：

$\Theta_4=\{E|E\in\Theta_0$，并且对任何$F\in\Delta$都有$E\setminus F\in\Theta_0\}$，

$\Theta_5=\{E|E\in\Theta_0$，并且对任何$F\in\Theta_0$都有$E\setminus F\in\Theta_0\}$

都等于Θ_0. 因此(*)结论的后半部分成立. ▍

引理 3 假定Φ及Ψ是分别由空间X及Y的子集所组成的σ环，μ及ν是分别在Φ及Ψ上定义的σ有限的正测度，那么对任何$E\in\Phi\times\Psi$，

(1) $\mu(E^Q)$及$\nu(E_P)$分别是变动点Q及P的可测函数(分别相对于ν及μ)；

(2) $\int_Y\mu(E^Q)\mathrm{d}\nu(e_Q)=\int_X\nu(E_P)\mathrm{d}\mu(e_P)$.

证明 先假定μ及ν都是总质量σ有限的并且$X=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}X_m$，$Y=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}Y_m$，这里对任何$m$，$\mu(X_m)<+\infty$，$\nu(Y_m)<+\infty$. 这时候当然不妨假定当$m\neq k$时，$X_m\cap X_k=\varnothing$，$Y_m\cap Y_k=\varnothing$. 令

$$\Theta=\{F|F\in\Phi\times\Psi,\text{并且对任何正整数}k\text{及}m,$$
$$E=F\cap(X_k\times Y_m)\text{满足}(1),(2)\}.$$

由于$X_1\times Y_1,X_1\times Y_2,X_2\times Y_1,\cdots$两两不相交，任何一个点集$F\subseteq X\times Y$可以表示为两两不相交的集合的和：

$$F=\bigcup_{k,m}(F\cap(X_k\times Y_m)).$$

现在假定$F\in\Theta$，那么上面等号右边的$\bigcup$后面每个点集都满足(1)，(2)，因此由 Lebesgue 收敛定理得到

$$\int_Y\mu(F^Q)\mathrm{d}\nu(e_Q)=\int_Y\sum_{k,m}\mu([F\cap(X_k\times Y_m)]^Q)\mathrm{d}\nu(e_Q)$$
$$=\sum_{k,m}\int_Y\mu([F\cap(X_k\times Y_m)]^Q)\mathrm{d}\nu(e_Q)$$

$$= \sum_{k,m} \int_X \nu([F \cap (X_k \times Y_m)]_P) \mathrm{d}\mu(e_P)$$

$$= \int_X \nu(F_P) \mathrm{d}\mu(e_P).$$

所以只要证明 $\Theta \supseteq \Phi \times \Psi$，那么(1)，(2)对所有 $E \in \Phi \times \Psi$ 成立.

令 Δ 表示所有的有限个 $A \times B$ 的和集的全体，这里 $A \in \Phi$，$B \in \Psi$. 那么 Δ 是一个环. 所以由引理 2，只要证明 Θ 有引理 2 中性质(1)及(2)就行了. 根据关于积分的 Lebesgue 收敛定理就可以得到性质(2). 性质(1)也容易看到，因为对任何 $A \times B \in \Delta$，如果令

$$E = (A \times B) \cap (X_k \times Y_m) = (A \cap X_k) \times (B \cap Y_m),$$

那么 $E_P = B \cap Y_m$，$E^Q = A \cap X_k$. 于是(1)及(2)成立.

一般地，μ 及 ν 只是 σ 有限的时候，对每一个 $E \in \Phi \times \Psi$ 存在一个 $X' \times Y' \in \Delta$ 使 $X' \times Y' \supseteq E$. 事实上，令

$$\Theta_1 = \{E \mid E \in \Phi \times \Psi, \text{并且存在} X' \times Y' \supseteq E, X' \in \Phi, Y' \in \Psi\},$$

那么 Θ_1 满足引理 2 的性质(1)，(2)，所以 $\Theta_1 \supseteq \Phi \times \Psi$.

由于 X' 及 Y' 的总质量(分别相对于 μ 及 ν)是 σ 有限的，前面关于总质量 σ 有限的情形的讨论对它们适用. 于是对任何一个 $E \in \Phi \times \Psi$，(1)及(2)成立. ▎

由(1.4.2)，对 $E \in \Phi \times \Psi$，令

$$\mu \times \nu(E) = \int_Y \mu(E^Q) \mathrm{d}\nu(e_Q) = \int_X \nu(E_P) \mathrm{d}\mu(e_P). \qquad (1.4.3)$$

$\mu \times \nu$ 定义了 $\Phi \times \Psi$ 上的一个测度，叫做 μ 及 ν 的**乘积测度**.

可以看到，$\mu \times \nu$ 也是 σ 有限的. 因为任何一个 $E \in \Phi \times \Psi$ 是一个 $X' \times Y'$ 的子集，这里 $X' \in \Phi$，$Y' \in \Psi$，X' 及 Y' 里的总质量(分别相对于 μ 及 ν)是 σ 有限的，所以 $X' = \bigcup_{m=1}^{\infty} X'_m$，$Y' = \bigcup_{m=1}^{\infty} Y'_m$，而 $\mu(X'_m) < +\infty$，$\nu(Y'_m) < +\infty$，$m = 1, 2, \cdots$. 于是

$$E = \bigcup_{k,m} (E \cap (X'_k \times Y'_m)),$$

而由(1.4.3)，

$$\mu \times \nu(E \cap (X'_k \times Y'_m)) \leqslant \mu \times \nu(X'_k \times Y'_m)$$

$$= \mu(X_k')\nu(Y_m') < +\infty.$$

现在可以建立 Fubini 定理的推广：

定理 1.4.1 条件同引理 3. 假定 h 是在 $X\times Y$ 上定义的非负可测函数，那么

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} h\mathrm{d}(\mu\times\nu) &= \int_Y\left(\int_X h(P,Q)\mathrm{d}\mu(e_P)\right)\mathrm{d}\nu(e_Q)\\ &= \int_X\left(\int_Y h(P,Q)\mathrm{d}\nu(e_Q)\right)\mathrm{d}\mu(e_P).\end{aligned} \tag{1.4.4}$$

证明 由于 h 是一列单调增加的非负、可测简单函数的极限，由 Lebesgue 收敛定理，我们只要证明：当 h 是非负、可测的简单函数时，(1.4.4)成立. 一个可测的简单函数可以表示作 $\sum_{i=1}^{k} v_i\chi_{E_i}$，这里 $\{E_i\}$ 是两两不相交的可测集，而 χ_{E_i} 是 E_i 的特征函数，v_i 是常数. 因此只要证明：当 h 是 χ_E 时，$E\in\Phi\times\Psi$，(1.4.4)成立. 但这是显然的，因为这时候，(1.4.4)式第一个等号左边成为

$$\int_E \chi_E\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \mu\times\nu(E),$$

而第一个等号的右边是

$$\int_Y\left(\int_X \chi_{E^Q}\mathrm{d}\mu\right)\mathrm{d}\nu(e_Q) = \int_Y \mu(E^Q)\mathrm{d}\nu(e_Q),$$

第二个等号的右边是

$$\int_X\left(\int_Y \chi_{E_P}\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}\mu(e_P) = \int_X \nu(E_P)\mathrm{d}\mu(e_P).$$

因此由引理 3 得到(1.4.4). ▌

定理 1.4.1 虽然只谈正测度及非负的可测函数，但是实际上这种"非负"的限制是没有多大关系的，因为一个测度总是两个正测度的差，一个可测函数总是两个非负的可测函数的差. 为了应用方便，我们把一般情况下的结论写成下面的定理 1.4.1′.

假定 Φ 及 Ψ 是分别由空间 X 及 Y 的子集所组成的 σ 环，μ 及 ν 是分别在 Φ 及 Ψ 上定义的 σ 有限的测度，那么把 μ 及 ν 的**乘积测度**定义为

$$\mu \times \nu = (\mu_+ \times \nu_+) - (\mu_+ \times \nu_-) - (\mu_- \times \nu_+) + (\mu_- \times \nu_-).$$

定理 1.4.1′ 假定 Φ 及 Ψ 是分别由空间 X 及 Y 的子集所组成的 σ 环，μ 及 ν 是分别在 Φ 及 Ψ 上定义的总质量 σ 有限的测度，h 是 $X\times Y$ 里定义的可测函数，而且 $\int_{X\times Y} h\mathrm{d}(\mu\times\nu)$ 有意义(等于实数或无限)，那么

$$\int_{X\times Y} h\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \int_Y\left(\int_X h(P,Q)\mathrm{d}\mu(e_P)\right)\mathrm{d}\nu(e_Q)$$
$$= \int_X\left(\int_Y h(P,Q)\mathrm{d}\nu(e_Q)\right)\mathrm{d}\mu(e_P). \quad (1.4.4')$$

定理 1.4.1 或 1.4.1′当然是形式非常一般的 Fubini 定理，但是应注意，这还不够包含关于二重 Lebesgue 积分的情形的古典的成果. 因为，如果把通常 Oxy 平面上的 Lebesgue 可测集全体记作 $\mathscr{L}_{xy}$，又把 x 轴及 y 轴上的 Lebesgue 可测集全体记作 $\mathscr{L}_x$ 及 $\mathscr{L}_y$，那么

$$\mathscr{L}_{xy} \supsetneqq \mathscr{L}_x \times \mathscr{L}_y.$$

理由下一节可以看到. 这表示对这种特殊情形，定理 1.4.1 或定理 1.4.1′比古典的 Fubini 定理弱. 不过这弱点不难克服，我们说明如下：

引理 4 假定 μ 是 σ 环 Φ 上定义的正测度，令

$\overline{\Phi} = \{E\cup N \mid E\in\Phi$ 而 N 是相对于 μ 的零集的子集$\}$，

那么 $\overline{\Phi}$ 是一个 σ 环，称作 Φ 相对于 μ 的**完备化**. 如果定义

$$\overline{\mu}(E\cup N) = \mu(E), \quad E\cup N\in\overline{\Phi},$$

那么 $\overline{\mu}$ 是在 $\overline{\Phi}$ 上定义的正测度，称作 μ 的**完备化**.

证明 假定 $E_i\cup N_i\in\overline{\Phi}$，$E_i\in\Phi$ 而 N_i 是零集 A_i 的子集($i=1,2,\cdots$)，那么

$$(E_1\cup N_1)\setminus(E_2\cup N_2) = (E_1\cup N_1)\cap C(E_2)\cap C(N_2)$$
$$= (E_1\cup N_1)\cap C(E_2)\cap[C(A_2)\cup(A_2\setminus N_2)]$$
$$= (E_1\cap C(E_2)\cap C(A_2))\cup N$$
$$= (E_1\setminus E_2\setminus A_2)\cup N,$$

这里

$$N=(N_1\cap C(E_2)\cap(C(A_2)\cup(A_2\setminus N_2)))$$
$$\cup(E_1\cap C(E_2)\cap(A_2\setminus N_2))$$

是零集的子集，而 $E_1\setminus E_2\setminus A_2\in\Phi$. 所以 $(E_1\cup N_1)\setminus(E_2\cup N_2)\in\bar{\Phi}$.

其次，$\bigcup\limits_i(E_i\cup N_i)=\left(\bigcup\limits_i E_i\right)\cup\left(\bigcup\limits_i N_i\right)\in\bar{\Phi}$，因为 $\bigcup\limits_i E_i\in\Phi$，而 $\bigcup\limits_i N_i$ 包含在可列个零集的和集中，因此也包含在零集中.

这证明了 $\bar{\Phi}$ 是 σ 环.

再证明 $\bar{\mu}$ 是测度. 首先，假定

$$E_1\cup N_1=E_2\cup N_2,$$

那么

$$\varnothing=(E_1\cup N_1)\setminus(E_2\cup N_2)=(E_1\setminus E_2\setminus A_2)\cup N.$$

所以，$E_1\setminus E_2\setminus A_2$ 是空集，就有 $E_1\setminus E_2$ 是零集. 由此，$\mu(E_1)=\mu(E_1\setminus E_2)+\mu(E_1\cap E_2)=\mu(E_1\cap E_2)$. 同样，$\mu(E_2)=\mu(E_1\cap E_2)$. 所以，$\bar{\mu}(E_1\cup N_1)=\mu(E_1)=\mu(E_1\cap E_2)=\mu(E_2)=\bar{\mu}(E_2\cup N_2)$. 这说明 $\bar{\mu}$ 那样定义是合理的.

假定 $E_i\cup N_i(i=1,2,\cdots)$ 是属于 $\bar{\Phi}$ 的可列个两两不相交的点集，这里 $E_i\in\Phi$，而 N_i 是零集的子集，那么

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_i(E_i\cup N_i)\right)=\bar{\mu}\left(\bigcup_i E_i\cup\bigcup_i N_i\right)$$
$$=\mu\left(\bigcup_i E_i\right)=\sum_i\mu(E_i)=\sum_i\bar{\mu}(E_i\cup N_i).$$

所以 $\bar{\mu}$ 是绝对可加的，因此是测度. ▌

定理 1.4.2 假定 Φ 及 Ψ 是分别由空间 X 及 Y 的子集组成的 σ 环，μ 及 ν 是分别在 Φ 及 Ψ 上定义的 σ 有限的正测度，$h(P,Q)$ 是相对于 $\overline{\mu\times\nu}$ 可测的非负函数，那么

(1) $\bar{\nu}(\{Q\mid h(P,Q)$ 作为 P 的函数相对于 $\bar{\mu}$ 不可测$\})=0$;

(2) $\bar{\mu}(\{P\mid h(P,Q)$ 作为 Q 的函数相对于 $\bar{\nu}$ 不可测$\})=0$;

(3) $\int h\,\mathrm{d}(\overline{\mu\times\nu})=\iint h(P,Q)\mathrm{d}\bar{\mu}(e_P)\mathrm{d}\bar{\nu}(e_Q)$

$$= \iint h(P,Q)\mathrm{d}\bar{\nu}(e_Q)\mathrm{d}\bar{\mu}(e_P).$$

证明 跟证明定理 1.4.1 及 1.4.1′的时候一样，只要证明当 h 是任何一个特征函数 $\chi_E(E\in\overline{\Phi\times\Psi})$时，定理成立. 假定 $E\in\overline{\Phi\times\Psi}$，那么 $E=E'\cup N$，这里 $E'\in\Phi\times\Psi$，N 是一个相对于 $\mu\times\nu$ 的零集 A 的子集. 不妨假定 $E'\cap N=\varnothing$，于是

$$\chi_E=\chi_{E'}+\chi_N.$$

现在 $\int\nu(A_P)\mathrm{d}\mu(e_P)=\mu\times\nu(A)=0$，所以相对于 μ 几乎处处 $\nu(A_P)=0$，也就是至多除了 P 属于一个相对于 μ 的零集外，A_P 是相对于 ν 的零集. 因此由 $N_P\subseteq A_P$ 知道，至多除了 P 属于一个相对于 μ 的零集外，N_P 是相对于 $\bar{\nu}$ 的零集. 所以相对于 μ，$\bar{\nu}(N_P)$ 几乎处处等于 0. 因此

$$\iint\chi_N(P,Q)\mathrm{d}\bar{\nu}(e_Q)\mathrm{d}\bar{\mu}(e_P)=\iint\chi_{N_P}(Q)\mathrm{d}\bar{\nu}(e_Q)\mathrm{d}\bar{\mu}(e_P)$$
$$=\int\bar{\nu}(N_P)\mathrm{d}\bar{\mu}(e_P)=0.$$

从而有

$$\iint\chi_E(P,Q)\mathrm{d}\bar{\nu}(e_Q)\mathrm{d}\bar{\mu}(e_P)=\iint\chi_{E'}(P,Q)\mathrm{d}\bar{\nu}(e_Q)\mathrm{d}\bar{\mu}(e_P)$$
$$=\bar{\mu}\times\bar{\nu}(E')=\mu\times\nu(E')$$
$$=\overline{\mu\times\nu}(E)=\int\chi_E\mathrm{d}\,\overline{\mu\times\nu}.$$

同样可以证明 $\chi_E(P,Q)=\chi_{E^Q}(P)$作为 P 的函数相对于 $\bar{\mu}$ 是可测的，至多除了 Q 属于一个相对于 ν 的零集外，并且

$$\iint\chi_E(P,Q)\mathrm{d}\bar{\mu}(e_P)\mathrm{d}\bar{\nu}(e_Q)=\int\chi_E\mathrm{d}\,\overline{\mu\times\nu}. \quad ▮$$

定理 1.4.2 包含了前面提到的关于二重 Lebesgue 积分的 Fubini 定理.

习　题

1. 假定 μ 及 ν 是两个 σ 有限的测度，$h(P,Q)$相对于 $\mu\times\nu$ 可

测，那么对任何固定的 P，$h(P,Q)$作为 Q 的函数相对于 ν 可测，同时对任何固定的 Q，$h(P,Q)$作为 P 的函数相对于 μ 可测.

2. 假定 μ 及 ν 是两个 σ 有限的测度，$h(P,Q)$相对于 $\mu\times\nu$ 可积分，那么对固定的 P，$h(P,Q)$作为 Q 的函数相对于 ν 可积，至多除了 P 属于一个相对于 μ 的零集以外，同时把 P，Q 及 μ，ν 都相互对调了来说也一样.

3. 把定理 1.4.2 推广到 μ 及 ν 都是 σ 有限的测度的情形去(不要正的假设).

4. 假定 μ 表示 Oxy 平面的 x 轴上的 Lebesgue 测度，ν 表示在 y 轴的所有子集 e 组成的 σ 环上定义的测度，而 $\nu(e)$等于属于 e 的点的数目. 把(0,0)到(1,1)的直线段记作 E，证明引理 3 的结论对 E 不成立. 为什么?

§1.5 测度的扩张及外测度

上一节已经不止一次谈到测度定义的扩张，比方测度的完备化，这一节要在这个方面作一点补充的说明.

在一个由点集组成的环(不一定是 σ 环)上定义的绝对可加的、不恒等于$+\infty$或者$-\infty$的集函数也叫做一个**测度**，其他像正测度、σ 有限等等概念都照推.

假定 Δ 及 Δ' 是两个由点集组成的环，$\Delta'\supseteq\Delta$. μ 及 μ' 是分别在 Δ 及 Δ' 上定义的测度. 假定对每个 $e\in\Delta$，$\mu'(e)=\mu(e)$，就说 μ' 是 μ 在 Δ' 上的**扩张**. μ 是 μ' 在 Δ 上的**限制**，记为 $\mu'|\Delta$ 或 $\mu'|_\Delta$.

假定 Ω 是一族点集. 令 $\Omega_\sigma=\{A\,|\,A=\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m, A_m\in\Omega\}$，$\Omega_\delta=\{A\,|\,A=\bigcap_{m=1}^{\infty}A_m, A_m\in\Omega\}$. 当然 $\Omega_\sigma\supseteq\Omega$，$\Omega_\delta\supseteq\Omega$. 如果 Ω 是 σ 环，那么 $\Omega_\sigma=\Omega_\delta=\Omega$.

引理 1 假定 Δ 是由点集组成的一个环，$S(\Delta)$是 Δ 所繁殖的

σ 环，那么对每个 $A\in S(\Delta)$，存在一个 $B\in\Delta_\sigma$ 使 $A\subseteq B$.

证明 令

$$\Theta=\{E\mid \text{存在 } B\in\Delta_\sigma \text{ 使 } E\subseteq B\},$$

只要证明 $S(\Delta)\subseteq\Theta$ 就行了. 我们利用 § 1.4 中引理 2 来证明. 首先，如果 $E\in\Delta$，那么 $E\subseteq E\in\Delta\subseteq\Delta_\sigma$，因此 $E\in\Theta$. 这表示 $\Delta\subseteq\Theta$. 所以 § 1.4 引理 2 里的条件(1)成立.

再证明 § 1.4 引理 2 的条件(2)成立. 假定 $\{E_m\}$ 是 Θ 的单调增加列，那么对每个 E_m 存在 $B_m\in\Delta_\sigma$ 使 $\lim\limits_{m\to\infty}E_m=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}E_m\subseteq\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}B_m\in\Delta_{\sigma\sigma}=\Delta_\sigma$. 假定 $\{E_m\}$ 是 Θ 的单调减小列，那么取 $B_1\in\Delta_\sigma$ 使 $E_1\subseteq B_1$，这样 $\lim\limits_{m\to\infty}E_m=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}E_m\subseteq E_1\subseteq B_1\in\Delta_\sigma$. 因此，无论怎样，$\lim\limits_{m\to\infty}E_m\in\Theta$. 所以(2) 成立，从而有 $S(\Delta)\subseteq\Theta$. ▌

定理 1.5.1 假定 Δ 是一个由空间 X 的子集组成的环，μ 是 Δ 上的一个 σ 有限的正测度在 $S(\Delta)$上的扩张，那么 μ 是 σ 有限的，并且对任何正数 ε 及任何 $A\in S(\Delta)$，

(1) 存在 $B\in\Delta_\sigma$ 使 $A\subseteq B$，并且 $\mu(B\setminus A)<\varepsilon$；

(2) 如果再假定 $X\in\Delta$，那么存在 $D\in\Delta_\delta$ 使 $D\subseteq A$，并且 $\mu(A\setminus D)<\varepsilon$.

证明 先证明(1). 令

$$\Theta=\{A\mid A\in S(\Delta)\text{ 并且(1) 成立}\},$$

那么只用证明 $S(\Delta)\subseteq\Theta$. 利用 § 1.4 引理 2 分三步证明.

(i) 如果 $A\in\Delta$，那么(1)当然成立，所以 $A\in\Theta$. 这表示 $\Theta\supseteq\Delta$.

(ii) 如果 $\{A_m\}$ 是 Θ 的单调增加子列，那么存在 $B_m\in\Delta_\sigma$ 使 $A_m\subseteq B_m$，并且当 $m=1,2,\cdots$ 时，

$$\mu(B_m\setminus A_m)<\varepsilon/2^m.$$

令 $A=\bigcup\limits_m A_m=\lim\limits_{m\to\infty}A_m$，$B=\bigcup\limits_m B_m\in\Delta_{\sigma\sigma}=\Delta_\sigma$，那么 $A\subseteq B$，并且

$$\mu(B\setminus A)\leqslant\mu\Big(\bigcup_m(B_m\setminus A_m)\Big)$$

$$\leqslant \sum_m \mu(B_m \backslash A_m) < \sum_m \varepsilon/2^m = \varepsilon.$$

因此，$\lim_{m\to\infty} A_m = A \in \Theta$.

(iii) 现在假定$\{A_m\}$是Θ的单调减小子列. 由引理 1，A_1 被可列个属于Δ的点集所覆盖. 每个属于Δ的点集又被可列个质量有限的属于Δ的点集E_j所覆盖. 所以

$$A_1 = \bigcup_{j=1}^{\infty}(E_j \cap A_1),$$

其中$\mu(E_j) < +\infty$，$E_j \in \Delta$，$j = 1, 2, \cdots$.

令 $A = \lim_{m\to\infty} A_m = \bigcap_m A_m$，那么

$$+\infty > \mu(A \cap E_j) = \mu\left(\bigcap_m (A_m \cap E_j)\right) = \lim_{m\to\infty}\mu(A_m \cap E_j).$$

因此，对任何正数ε，存在正整数N_j使

$$\mu((A_{N_j} \cap E_j)\backslash(A \cap E_j)) < \varepsilon/2^{j+1}.$$

对A_{N_j}又存在$B_j \in \Delta_\sigma$使$B_j \supseteq A_{N_j}$并且$\mu(B_j \backslash A_{N_j}) < \varepsilon/2^{j+1}$. 所以

$$\begin{aligned}&\mu((B_j \cap E_j)\backslash(A \cap E_j))\\ &\quad = \mu((B_j \cap E_j)\backslash(A_{N_j} \cap E_j))\\ &\qquad + \mu((A_{N_j} \cap E_j)\backslash(A \cap E_j)) < \varepsilon/2^j.\end{aligned}$$

由于$B_j \cap E_j \in \Delta_\sigma$，得到$B = \bigcup_j (B_j \cap E_j) \in \Delta_{\sigma\sigma} = \Delta_\sigma$. 显然$B \supseteq A$，并且

$$\mu(B\backslash A) \leqslant \sum_j \mu((B_j \cap E_j)\backslash(A \cap E_j)) < \sum_j \varepsilon/2^j = \varepsilon.$$

由(i)，(ii)，(iii)，根据§1.4 引理 2，$S(\Delta) \subseteq \Theta$. (1)得证.

现在证明(2). 根据假设，$X \in \Delta$并且$A \in S(\Delta)$，所以$C(A) = X\backslash A \in S(\Delta)$. 因此由(1)知道对任何正数$\varepsilon$，存在一个$B' \in \Delta_\sigma$使$B' \supseteq C(A)$且$\mu(B'\backslash C(A)) < \varepsilon$. $B'\backslash C(A) = B' \cap A$，所以$\mu(B' \cap A) < \varepsilon$. 因此，令$C(B') = D$，得到$D \in \Delta_\delta$并且$D \subseteq A$，还有

$$\mu(A\backslash D) = \mu(A\backslash C(B')) = \mu(A \cap B') < \varepsilon.$$

(2)得证.

最后，μ 的 σ 有限性是容易看到的，因为可以用前面(iii)里说明 A_1 的办法说明 $A\in S(\Delta)$ 被可列个质量有限的点集所覆盖. ▍

推论 1 假定 Δ 是一个由空间 X 的子集所组成的环，μ 是 Δ 上一个 σ 有限的正测度在 $S(\Delta)$ 上的扩张，那么对于 $A\in S(\Delta)$，

(1) 存在 $B'\in\Delta_{\sigma\delta}$，使 $B'\supseteq A$，并且 $\mu(B')=\mu(A)$；

(2) 如果再假设 $X\in\Delta$，那么存在 $D'\in\Delta_{\delta\sigma}$，使 $D'\subseteq A$，并且 $\mu(D')=\mu(A)$.

证明 (1) 由定理 1.5.1 中的结论(1)，可以取一列 $B_m\supseteq A$，$B_m\in\Delta_\sigma$，使当 $m=1,2,\cdots$ 时，

$$\mu(B_m\setminus A)<1/m.$$

令 $B'=\bigcap_m B_m\in\Delta_{\sigma\delta}$，那么 $B'\supseteq A$，并且当 $m=1,2,\cdots$ 时，

$$\mu(B'\setminus A)<1/m.$$

因此，$\mu(B'\setminus A)=0$. 由此就有 $\mu(B')=\mu(A)$.

(2) 由定理 1.5.1 中的(2)，可以取一列 $D_m\subseteq A$，$D_m\in\Delta_\delta$ 使当 $m=1,2,\cdots$ 时，

$$\mu(A\setminus D_m)<1/m.$$

令 $D'=\bigcup_m D_m\in\Delta_{\delta\sigma}$，那么 $D'\subseteq A$ 并且当 $m=1,2,\cdots$ 时，

$$\mu(A\setminus D')<1/m.$$

因此，$\mu(A\setminus D')=0$. 由此就有 $\mu(A)=\mu(D')$. ▍

推论 2 假设 μ 是一个在点集环 Δ 上定义的 σ 有限的测度，那么 μ 在 $S(\Delta)$ 上没有不同的扩张.

证明 假定 μ 是正的，那么由定理 1.5.1，μ 在 $S(\Delta)$ 上的扩张(仍旧记作 μ)如果存在的话，是由它在所有的属于 Δ_σ 的点集里所分布的质量唯一决定的. 由于每个 $A\in\Delta_\sigma$ 可以表示为可列个 $A_m\in\Delta$ 的和集，其中 $m=1,2,\cdots$，而 $\{A_m\}$ 可以假定是两两不相交的，所以

$$\mu(A)=\sum_m \mu(A_m).$$

因此 $\mu(A)$ 又是由 μ 在所有的属于 Δ 的点集里所分布的质量唯一

决定的.

如果 μ 不是正的，那么可以分作两个正测度来考虑. ▍

现在可以回顾一下 §1.4 引理 3 后所说的乘积测度. 假定 μ 和 ν 是两个分别在 σ 环 Φ 和 Ψ 上定义的 σ 有限的测度. $A\times B$ 的全体，这里 $A\in\Phi,B\in\Psi$，组成一个环 Δ，而 $\Phi\times\Psi=S(\Delta)$. 如果在 Δ 上定义测度 λ_1：

$$\lambda_1(A\times B)=\mu(A)\nu(B),$$

那么 λ_1 在 Δ 上是 σ 有限的. 所以由推论 2 知道，乘积测度 $\mu\times\nu$ 就是这个 λ_1 在 $\Phi\times\Psi$ 上的唯一的扩张.

上面谈到 σ 有限测度的扩张的唯一性，可是没有谈到存在问题. 在一个点集环 Δ 上定义的测度总可以扩张到 $S(\Delta)$上去. 不过当它原来不是 σ 有限时，这扩张不一定唯一. 为了说明这一点，我们先介绍一些更广泛的概念.

假定 Ω 是一族点集，如果任何一个属于 Ω 的点集的任何一个子集都属于 Ω，那么说 Ω 是**遗传的**.

外测度 假定 Φ 是一个由空间 X 的子集所组成的遗传的 σ 环，μ^* 是在 Φ 上定义的非负且单调增加的集函数，有下面的性质：

(1) $\mu^*(\varnothing)=0$;

(2) $\mu^*\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}E_m\right)\leqslant\sum\limits_{m=1}^{\infty}\mu^*(E_m)$，其中 $E_m\in\Phi,m=1,2,\cdots$,

那么说 μ^* 是一个**外测度**.

如果 $E\in\Phi$，对任何 $A\in\Phi$，有

(3) $\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\setminus E)$,

那么说 E 是(μ^*)**可测的**.

外测度的概念是 Carathéodory 创立的，当然是正测度的推广，不过可以证明：

定理 1.5.2 假定 μ^* 是一个外测度，那么(μ^*)可测集全体 Ψ 是一个 σ 环，μ^* 在 Ψ 上的限制(就是看作在 Ψ 上定义的集函数)是一个正测度，而且 Ψ 相对于 μ^* 是完备的(即 Ψ 相对于 μ^* 的完

备化就是 Ψ).

证明 先证明 Ψ 是一个环. 假设 μ^* 在遗传的 σ 环 Φ 上定义. 如果 E_1 及 E_2 都(μ^*)可测,那么对任何 $A\in\Phi$ 有

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(A\cap E_1)+\mu^*(A\backslash E_1)\\ &= \mu^*(A\cap E_1\cap E_2)+\mu^*((A\cap E_1)\backslash E_2)\\ &\quad +\mu^*((A\cap E_2)\backslash E_1)+\mu^*(A\backslash E_1\backslash E_2).\end{aligned} \tag{1.5.1}$$

用 $A\cap(E_1\cup E_2)$代替(1.5.1)里的 A,得到

$$\begin{aligned}\mu^*(A\cap(E_1\cup E_2)) = \mu^*(A\cap E_1\cap E_2)\\ +\mu^*((A\cap E_1)\backslash E_2)\\ -\mu^*((A\cap E_2)\backslash E_1)+0.\end{aligned}$$

再把这结果代入(1.5.1)中得到

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap(E_1\cup E_2))+\mu^*(A\backslash(E_1\cup E_2)). \tag{1.5.2}$$

所以,$(E_1\cup E_2)$是(μ^*)可测的.

其次,用 $A\backslash(E_1\backslash E_2)=(A\cap E_2)\cup(A\cap C(E_1))$代替(1.5.1)里的 A 得到

$$\begin{aligned}\mu^*(A\backslash(E_1\backslash E_2)) = \mu^*(A\cap E_1\cap E_2)+0\\ +\mu^*((A\cap E_2)\backslash E_1)\\ +\mu^*(A\backslash E_1\backslash E_2).\end{aligned}$$

把这结果代到(1.5.1)中得到

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\backslash(E_1\backslash E_2))+\mu^*((A\cap E_1)\backslash E_2). \tag{1.5.3}$$

注意,$(A\cap E_1)\backslash E_2=(A\cap E_1)\backslash(A\cap E_2)=A\cap(E_1\backslash E_2)$. 由(1.5.3)就看到$(E_1\backslash E_2)$是($\mu^*$)可测的.

因此,Ψ 是一个环. 再证明 Ψ 是 σ 环.

假定$\{E_m\}$是一列(μ^*)可测集. 先假定$\{E_m\}$互不相交. 那么由(1.5.2),根据归纳法知道对 $A\in\Phi$ 及正整数 k,

$$\mu^*(A)=\mu^*\left(A\cap\left(\bigcup_{m=1}^{k}E_m\right)\right)+\mu^*\left(A\setminus\bigcup_{m=1}^{k}E_m\right)$$

$$\geqslant\sum_{m=1}^{k}\mu^*(A\cap E_m)+\mu^*\left(A\setminus\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m\right).$$

k 是任意的，所以由级数和的定义知道

$$\mu^*(A)\geqslant\sum_{m=1}^{\infty}\mu^*(A\cap E_m)+\mu^*\left(A\setminus\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m\right)$$

$$\geqslant\mu^*\left(A\cap\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m\right)\right)+\mu^*\left(A\setminus\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m\right).$$

但是，$A=\left(A\cap\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m\right)\right)\cup\left(A\setminus\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m\right)$. 所以由外测度的定义，上面不等式必须成为等式. 因此，$\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m$ 是(μ^*) 可测的. 对一般的 E_m，令 $D_m=E_m\setminus\bigcup_{k=1}^{m-1}E_k$，于是$\{D_m\}$ 两两不相交. $\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m=\bigcup_{m=1}^{\infty}D_m$ 是(μ^*) 可测. 所以 Ψ 是 σ 环.

再证明 μ^* 是 Ψ 上的正测度. 假定$\{E_m\}$是一列属于 Ψ 的两两不相交的点集，那么对正整数 k，

$$\mu^*\left(\bigcup_m E_m\right)=\mu^*(E_1)+\mu^*\left(\bigcup_m E_m\setminus E_1\right)$$

$$=\mu^*(E_1)+\mu^*(E_2)+\mu^*\left(\bigcup_m E_m\setminus E_1\setminus E_2\right)$$

$$=\mu^*(E_1)+\cdots+\mu^*(E_k)+\mu^*\left(\bigcup_m E_m\setminus E_1\setminus\cdots\setminus E_k\right)$$

$$\geqslant\mu^*(E_1)+\cdots+\mu^*(E_k).$$

因此，由级数和的定义得到

$$\mu^*\left(\bigcup_m E_m\right)\geqslant\sum_m\mu^*(E_m).$$

由外测度的定义，这不等式必须是等式. 所以 μ^* 是 Ψ 上的测度.

最后，零集的子集当然是(μ^*)可测的. 因此，Ψ 相对于 μ^* 完备. ▌

根据定理 1.5.2 可以证明测度扩张的存在性,这包含在下面的定理里.

定理 1.5.3 假定 μ 是在一个环 Δ 上定义的正测度,再假定 Φ 是 Δ 所繁殖的遗传的 σ 环(能包含 Δ 的最小的遗传的 σ 环). 对每个属于 Φ 的点集 E,定义

$$\mu^*(E) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) \,\middle|\, E_k \in \Delta, \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \supseteq E \right\},$$

那么 μ^* 是在 Φ 上定义的一个外测度,μ^* 在 $S(\Delta)$上的限制是一个正测度, 它是 μ 在$S(\Delta)$上的一个扩张. 特别, 当 μ 是 σ 有限时, $S(\Delta)$相对于 μ^* 的完备化就是(μ^*)可测集全体.

证明 显然,当 $E \in \Delta$ 时,$\mu(E) = \mu^*(E)$. 所以 $\mu^*(\varnothing) = 0$.

Φ 是 Δ 所繁殖的遗传的 σ 环. 假定$\{E_m\}$是 Φ 的一个子列. 任意取一个正数 ε,对每个 E_m 取 Δ 的一个子列$\{E_{mj}\}$使 $\bigcup_j E_{mj} \supseteq E_m$, 并且

$$\sum_j \mu(E_{mj}) \leqslant \mu^*(E_m) + \varepsilon/2^m,$$

那么由于 $\bigcup_{m,j} E_{mj} \supseteq E$, 得到

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{m,j} \mu(E_{mj}) \leqslant \sum_m \mu^*(E_m) + \varepsilon.$$

因此, $\mu^*(E) \leqslant \sum_m \mu^*(E_m)$. 所以 μ^* 是 Φ 上的一个外测度.

把(μ^*)可测集全体记作 Ψ. 我们证明 $\Delta \subseteq \Psi$.

假定 $E \in \Delta, A \in \Phi$,那么对任何正数 ε,存在可列个 $E_m \in \Delta$ 使 $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m \supseteq A$ 并且

$$\mu^*(A) + \varepsilon \geqslant \sum_m \mu(E_m) = \sum_m (\mu(E_m \cap E) + \mu(E_m \backslash E))$$
$$\geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E).$$

因此,$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E)$. 这不等式当然必须是等式. 因此,$E$ 是(μ^*)可测的, 也就是 $E \in \Psi$. 所以 $\Delta \subseteq \Psi$.

由定理 1.5.2，Ψ 是 σ 环，所以 $S(\Delta)\subseteq\Psi$. 因此，μ^* 在 $S(\Delta)$上的限制是 $S(\Delta)$上的一个正测度.

最后，假定 μ 是 σ 有限的. 我们证明 $S(\Delta)$的完备化 $\overline{S}$ 就是 Ψ. 因为 Ψ 是完备的，所以 $\overline{S}\subseteq\Psi$. 注意，由定义，$\mu^*$ 也是 σ 有限的，因此任何一个(μ^*)可测集是可列个质量有限的(μ^*)可测集的和集. 所以只要证明任何一个质量有限的(μ^*)可测集 E 一定属于 $\overline{S}$ 就行了. 由定义，对任何一个正整数 m，存在$\{E_{mj}\}\subseteq\Delta$ 使 $\bigcup_{j=1}^{\infty}E_{mj}\supseteq E$，并且

$$\mu^*(E)\geqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_{mj})-\frac{1}{m}\geqslant\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_{mj}\right)-\frac{1}{m}.$$

令 $G=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}E_{mj}\in\Delta_{\sigma\delta}\subseteq S(\Delta)$，那么 $G\supseteq E$，并且当 $m=1,2,\cdots$ 时，

$$\mu^*(G)\geqslant\mu^*(E)\geqslant\mu^*(G)-1/m.$$

由于假设 $\mu^*(E)<+\infty$，得到 $\mu^*(G\backslash E)=0$. 同样，又得到一个 $G'\in\Delta_{\sigma\delta}$使 $G'\supseteq G\backslash E$，并且

$$\mu^*(G')=\mu^*(G\backslash E)=0.$$

因此，

$$\begin{aligned}E&=(E\backslash G')\cup(E\cap G')\\&=(G\backslash G')\backslash((G\backslash E)\backslash G')\cup(E\cap G')\\&=(G\backslash G')\cup(E\cap G'),\end{aligned}$$

这里 $G\backslash G'\in S(\Delta)$，而 $E\cap G'$是零集 G' 的子集. 因此，$E\in\overline{S}$. ▌

由外测度得到测度及可测集，这是定义古典的 Lebesgue 测度时所采用的方法. 直线上一切由有限个开、闭或半开的区间所组成的和集的全体是环 Δ. 属于 Δ 的每个点集用它的组成区间的长度的和当测度，那么这个测度是 σ 有限的. 于是在 $S(\Delta)$上有唯一的扩张，这扩张的完备化就是 Lebesgue 测度；而 $S(\Delta)$的完备化就是 Lebesgue 可测集全体.

习　题

1. 证明 $\Omega_{\sigma\sigma}=\Omega_\sigma,\Omega_{\delta\delta}=\Omega_\delta$.

2. 假定 c 是一个正数. 对平面点集 E 定义

$$\mu_c^*(E)=\sup_{a>0}\inf\Big\{\sum_{m=1}^{\infty}(d(E_m))^c\,\Big|\,E=\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m,$$
$$d(E_m)<a,m=1,2,\cdots\Big\},$$

这里 $d(E_m)$ 表示 E_m 的直径，那么 μ_c^* 是在由所有的平面点集所组成的遗传的 σ 环上定义的一个外测度，叫 **c 度的 Hausdorff(外)测度**. μ_c^* 与 Lebesgue 测度的关系怎样?

3. μ 是在 σ 环 Ψ 上定义的一个 σ 有限的正测度. 对每个属于 Ψ 所繁殖的遗传的 σ 环 Φ 的点集 E，定义

$$\mu_*(E)=\sup\{\mu(F)\,|\,E\supseteq F\in\Psi\},$$
$$\mu^*(E)=\inf\{\mu(G)\,|\,E\subseteq G\in\Psi\},$$

那么 μ^* 是在 Φ 上定义的一个外测度，μ_* 叫做在 Φ 上定义的一个**内测度**. 证明：如果 $E\in\Phi$，并且 E 是(μ^*)可测的，那么

$$\mu_*(E)=\mu^*(E).$$

反过来，如果 $\mu_*(E)=\mu^*(E)<+\infty$，那么 E 是(μ^*)可测的.

§1.6　拓扑空间上的测度及连续函数空间上的泛函

拓扑的最基本的知识假定读者已经熟悉. ①

令 X 是一个拓扑空间，$S\subseteq X$. S 的边界点全体记作 $B(S)$，S 的内点及边界点的全体称为 S 的**包**，记作 $\bar{S}$. S 的聚点全体记作 S'，叫做 S 的**导集**. 容易看到，$\bar{S}=S\cup S'$.

若拓扑空间的子集不是两不相交的不空的相对开集的和集，

---

① 关于拓扑空间、尺度空间(或度量空间)可以看有关书籍，例如张鸣镛的《现代分析基础》(厦门大学出版社，1987)，第 49～75 页.

就说 D 是**连通的**. 连通的开集叫**区域**.

用 $\boldsymbol{R}^1$ 表示实数全体. 以开区间全体当基底的拓扑称为 $\boldsymbol{R}^1$ 的**通常拓扑**. n 个 $\boldsymbol{R}^1$ 的乘积记作 $\boldsymbol{R}^n$,称为 n 维实数空间. 下列集合叫做 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个**细胞**:

$$(a^1,b^1)\times\cdots\times(a^n,b^n)=\{(x^1,\cdots,x^n)\,|\,a^i<x^i<b^i,i=1,\cdots,n\}.$$

$\boldsymbol{R}^n$ 的子集为开集的充分而且必要的条件是它是细胞的和集.

我们用 $\boldsymbol{E}^n$ 表示 n 维欧氏空间. $\boldsymbol{E}^1,\boldsymbol{E}^2,\boldsymbol{E}^3$ 分别就是直线、欧氏平面、三维欧氏空间. $\boldsymbol{E}^n$ 可以与 $\boldsymbol{R}^n$ 建立一一对应,这个对应称为 $\boldsymbol{E}^n$ 的一个**直角坐标法**. 在 $\boldsymbol{E}^n$ 中取定一个直角坐标法以后,每一点都可以用它的坐标表示. 这时候我们也把 $\{(x^1,\cdots,x^n)\,|\,a^i<x^i<b^i,$ $i=1,\cdots,n\}$ 这样的点集称为(在所取的坐标法下的) $\boldsymbol{E}^n$ 的一个细胞. 用这种细胞当基底作成一个拓扑,称为 $\boldsymbol{E}^n$ 的**通常拓扑**.

另一方面,设 $\boldsymbol{E}^n$ 中任意两点 P 及 Q 对应于 $(x^1,\cdots,x^n)$ 及 $(y^1,$ $\cdots,y^n)$,那么,$d(x,y)=\sqrt{(x^1-y^1)^2+\cdots+(x^n-y^n)^2}$ 给出了 $\boldsymbol{E}^n$ 中任何两点对应的一个非负实数. 可以看到,这个函数 d 符合尺度的条件. 因此我们总把 $\boldsymbol{E}^n$ 看作是在这个尺度 d 下的尺度空间. 由这个尺度所产生的拓扑就是 $\boldsymbol{E}^n$ 的通常拓扑.

同样,在 $\boldsymbol{R}^n$ 中也可以引入距离作为尺度. 如果把 $\boldsymbol{R}^n$ 看作在这个尺度下的尺度空间的话,那么所得到的拓扑也就是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的通常拓扑. 所以在 $\boldsymbol{E}^n$ 的一个固定的直角坐标法下,可以不必区别 $\boldsymbol{E}^n$ 及 $\boldsymbol{R}^n$.

通常把 $\boldsymbol{R}^1$ 跟另外两点组成的点集的和集称作扩大的实数系统,记为 $\hat{\boldsymbol{R}}^1$. 这两点中一点规定比一切实数小,记作 $-\infty$,另一点比一切实数大,记作 $+\infty$. 关于它们的运算在 §1.1 中已经说过. $\hat{\boldsymbol{R}}^1$ 上用所有区间以及 $[-\infty,a)$,$(a,+\infty]$ 这种形式的"区间"全体当基底的拓扑称为 $\hat{\boldsymbol{R}}^1$ 上的通常拓扑. 以后若没有另外的声明的话,$\hat{\boldsymbol{R}}^1$ 都看作在这个拓扑下的拓扑空间.

把点集 X 映入 $\hat{\boldsymbol{R}}^1$ 的映射叫**实函数**或者**实泛函**.

令 X 及 Y 是拓扑空间,f 是把 X 的子集 D 映入 Y 的映射,那

么 f 在 D 中连续的充分而且必要的条件是 $f(D)$ 的任何一个相对开集的原像是 D 的相对开集. 因此,对于 D 上的实函数 f,它在 D 中连续的充分而且必要的条件是:对所有的实数 a 及 b,点集 $\{P|a<f(P)<b,P\in D\}$,$\{P|-\infty\leqslant f(P)<b,P\in D\}$ 及 $\{P|a<f(P)\leqslant+\infty,P\in D\}$ 都是相对于 D 的开集.

在 §1.1~§1.5 中说明了关于测度及积分的基本理论,现在要说明在拓扑概念的基础上建立的特殊的测度及积分理论.

一个拓扑空间 X 的开子集全体(也就是拓扑)记作 Γ,Γ 所繁殖的 σ 环记作 (B),属于 (B) 的点集称为 **Borel 集**,或者 **(B) 集**,或者 **(B) 可测集**. X 的闭子集全体记作 Φ. 当然,$\Phi\subseteq(B)$,并且 (B) 也是 Φ 所繁殖的 σ 环.

如果一个实函数 f 在一个 (B) 集 S 里定义,并且对任何实数 c,$\{P|f(P)>c\}\in(B)$,那么说 f 是 **(B) 可测的**. 由定义知道假定一个函数 f 在一个 (B) 集 S 里定义并且连续,那么 f 一定是 (B) 可测的.

在 (B) 上定义的测度叫做 **(B) 测度**. 一个 (B) 可测函数关于 (B) 测度的积分当然不过是 §1.2 所说的积分的特殊情形. 这里不准备一般地来谈它的特点,下面只考虑比较特殊的情形.

如果一个正常的或正规的(normal)拓扑空间 X 的闭子集全体 $\Phi\subseteq\Gamma_\delta$,那么说 X 是**完全正常的**.

比方,一个尺度空间就一定是完全正常的,因为假定 S 是它的一个闭子集,那么 $S=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{P\in S}K(P,1/m)$,这里 $K(P,1/m)$ 表示用 P 作中心,$1/m$ 作半径的开球,而 $\bigcup\limits_{P\in S}K(P,1/m)$ 当然是开集.

因此,E^n 也是完全正常的.

引理 1 对完全正常空间,$\Gamma\subseteq\Phi_\sigma$.

证明 假定 $E\in\Gamma$,那么 $C(E)\in\Phi$. 因此,$C(E)\in\Gamma_\delta$,$E\in\Phi_\sigma$. ▌

引理 2 对完全正常空间,Φ_σ 及 Γ_δ 的公共部分 $\Phi_\sigma\cap\Gamma_\delta$ 是一

个环，并且它所繁殖的 σ 环就是(B).

证明 假定 $E_i\in\Phi_\sigma\cap\Gamma_\delta(i=1,2)$，那么

$$E_i=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_{ik}=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_{ik}\quad(i=1,2),$$

这里$\{F_{ik}\}$是关于 k 单调增加的闭集，$\{G_{ik}\}$是关于 k 单调减小的开集. 因此，

$$E_1\cup E_2=\bigcup_{i=1}^{2}\bigcup_{k=1}^{\infty}F_{ik}\in\Phi_\sigma,$$

$$E_1\cup E_2=\bigcup_{i=1}^{2}\bigcap_{k=1}^{\infty}G_{ik}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{2}G_{ik}\in\Gamma_\delta.$$

从而有 $E_1\cup E_2\in\Phi_\sigma\cap\Gamma_\delta$. 又

$$E_1\backslash E_2=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_{1k}\Big\backslash\bigcap_{k=1}^{\infty}G_{2k}=\bigcup_{k=1}^{\infty}(F_{1k}\backslash G_{2k})\in\Phi_\sigma,$$

$$E_1\backslash E_2=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_{1k}\Big\backslash\bigcup_{k=1}^{\infty}F_{2k}=\bigcap_{k=1}^{\infty}(G_{1k}\backslash F_{2k})\in\Gamma_\delta.$$

因此，$E_1\backslash E_2\in\Phi_\sigma\cap\Gamma_\delta$. 所以 $\Phi_\sigma\cap\Gamma_\delta$ 是一个环.

显然，$\Gamma\subseteq\Phi_\sigma\cap\Gamma_\delta\subseteq(B)$. 现在 Γ 所繁殖的 σ 环是(B)，所以 $\Phi_\sigma\cap\Gamma_\delta$所繁殖的 σ 环是(B). ▌

定理 1.6.1 假定 X 是一个完全正常的空间，μ 是在(B)上定义的一个正测度. 再假定 X 是可列个质量有限的开集 X_m 的和集，那么对任何一个 $E\in(B)$，

(1) 对任何正数 c，存在闭集 F 及开集 G 使 $F\subseteq E\subseteq G$，并且

$$\mu(E\backslash F)<c,\quad \mu(G\backslash E)<c;$$

(2) 存在 $H\in\Phi_\sigma$ 及 $K\in\Gamma_\delta$ 使 $H\subseteq E\subseteq K$，并且

$$\mu(E\backslash H)=0,\quad \mu(K\backslash E)=0.$$

证明 由 X 的完全正常性知道 X 的每一个闭子集 S 是可列个单调减小的开子集 U_k 的交集. 因此如果令 $U_k\cap X_m=U_{km}$，$S\cap X_m=S_m$，那么 $\bigcap_{k=1}^{m}U_{km}=S_m$. U_{km} 质量有限并且关于 k 单调减小，所以

$$\lim_{k\to\infty}\mu(U_{km}) = \mu(S_m).$$

因此,对任何正数 a,存在一个正整数 k_m 使

$$\mu(U_{k_m m}\setminus S_m) < a/2^m.$$

令 $U = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_{k_m m}$,那么

$$\mu(U\setminus S) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\mu(U_{k_m m}\setminus S_m) < a.$$

这表示对任何正数 a,每个闭子集 S 有邻域 U 满足 $\mu(U\setminus S)<a$.

现在假定 $E\in(B)$,那么由定理 1.5.1 知道对任何正数 c 存在 $V\in(\Phi_\sigma\cap\Gamma_\delta)\subseteq\Phi_\sigma$,使 $E\subseteq V$ 并且 $\mu(V\setminus E)<c/2$. 又 $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$,其中每个 S_i 是闭集. 因此由上一段的证明知道存在一个开集 U_i 使 $S_i \subseteq U_i$,并且 $\mu(U_i\setminus S_i) < c/2^{i+1}$. 这样,令 $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ 就得到

$$\mu(G\setminus V) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\mu(U_i\setminus S_i) < c/2.$$

因此,

$$\mu(G\setminus E) = \mu(G\setminus V) + \mu(V\setminus E) < c.$$

这就是(1)的第二个不等式.

再由同样理由,知道存在一个开集 $G'\supseteq C(E)$ 使 $\mu(G'\setminus C(E)) < c$,也就是 $\mu(E\setminus C(G'))<c$. 令 $C(G')=F$,那么 F 是闭集,并且 $F\subseteq E$, $\mu(E\setminus F)<c$. 这就是(1)的第一个不等式.

(2)是(1)的推论. 因为只要陆续取 $c=1/m\,(m=1,2,\cdots)$,得到一列开集 G_m 和一列闭集 F_m,使 $F_m\subseteq E\subseteq G_m$,并且

$$\mu(E\setminus F_m) < 1/m, \quad \mu(G_m\setminus E) < 1/m.$$

令 $H = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m \in \Phi_\sigma$, $K = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m \in \Gamma_\delta$,就得到(2)的两个等式. ▌

以后,假定一个测度 μ(不一定是正的)在一个拓扑空间 X 的 (B) 子集全体上定义,而且在 μ 下,X 是可列个质量有限的开集的和集,那么简称 μ 是 X 上的一个**开 σ 有限的(B)测度**. 显然,如果

μ 是开 σ 有限的，那么 μ_+，μ_-，及 $|\mu|$ 都是开 σ 有限的.

由定理 1.6.1 得到

推论 1 假定 μ 是完全正常空间 X 上的一个开 σ 有限的(B)测度，那么对任何(B)集 $E\subseteq X$，

(1) 对任何正数 c，存在闭集 F 及开集 G，使 $F\subseteq E\subseteq G$，并且

$$|\mu|(E\setminus F)<c,\quad |\mu|(G\setminus E)<c;$$

(2) 存在 $H\in\Phi_\sigma$ 及 $K\in\Gamma_\delta$ 使 $H\subseteq E\subseteq K$，并且

$$|\mu|(E\setminus H)=0,\quad |\mu|(K\setminus E)=0.$$

证明 由定理 1.6.1 知道，存在闭集 F_1 及 F_2 使 $F_1\subseteq E$，$F_2\subseteq E$，并且

$$\mu_+(E\setminus F_1)<c/2,\quad \mu_-(E\setminus F_2)<c/2.$$

令 $F=F_1\cup F_2$，那么 F 是闭集，$F\subseteq E$，并且

$$\begin{aligned}|\mu|(E\setminus F)&=\mu_+(E\setminus F)+\mu_-(E\setminus F)\\&\leqslant\mu_+(E\setminus F_1)+\mu_-(E\setminus F_2)<c.\end{aligned}$$

这就是(1)的第一个不等式.别的结论可以类似地证明. ▍

在拓扑空间 X 的子集族(B)上定义的正测度或者测度，如果具备定理 1.6.1 或者推论 1 所说的性质(1)，就称为**正则的**.由推论 1 得到

推论 2 在完全正常空间 X 的子集族(B)上定义的测度是正则的并且是 σ 有限的，其充分而且必要的条件是开 σ 有限.

证明 条件的充分性就是推论 1 的结论.必要性也是清楚的，因为假定 μ 是(B)上的一个正则 σ 有限测度，那么 X 是可列个质量有限的(B)集 X_i 的和集.每个 X_i 有一个邻域 V_i 使 $\mu(V_i\setminus X_i)<c$. X 是 V_i 这可列个质量有限的开集的和集. ▍

推论 3 假定 μ_1 及 μ_2 是完全正常空间 X 上的两个开 σ 有限的(B)测度，又假定对任何连续函数 f，$0\leqslant f\leqslant 1$，

$$\int f\mathrm{d}\mu_1=\int f\mathrm{d}\mu_2,$$

那么 $\mu_1=\mu_2$.(这里积分域 X 省去了)

证明 我们先注意，对于满足 $0\leqslant f\leqslant 1$ 的 f，$\int f\mathrm{d}\mu_1$ 及 $\int f\mathrm{d}\mu_2$ 虽不一定有限，但不会没有意义.

为了证明 $\mu_1=\mu_2$，由定理 1.6.1 知道只要证明：对任何闭集 F，$\mu_1(F)=\mu_2(F)$ 成立.

现在随便取一个闭集 F，对每一个正整数 m，取 F 的一个邻域 W_m，使

$$|\mu_1|(W_m\backslash F)<1/2m,\quad |\mu_2|(W_m\backslash F)<1/2m.$$

由 Urysohn 引理可以作一个连续函数 f_m，$0\leqslant f_m\leqslant 1$ 并且

$$f_m(P)=\begin{cases}1, & P\in F,\\ 0, & P\in C(W_m),\end{cases}$$

那么

$$\begin{aligned}\int f_m\mathrm{d}\mu_1 &= \int_F f_m\mathrm{d}\mu_1+\int_{W_m\backslash F} f_m\mathrm{d}\mu_1\\ &= \mu_1(F)+\int_{W_m\backslash F} f_m\mathrm{d}\mu_1.\end{aligned}$$

同样，

$$\int f_m\mathrm{d}\mu_2=\mu_2(F)+\int_{W_m\backslash F} f_m\mathrm{d}\mu_2.$$

由假设 $\int f_m\mathrm{d}\mu_1=\int f_m\mathrm{d}\mu_2$，又由

$$\left|\int_{W_m\backslash F} f_m\mathrm{d}\mu_i\right|\leqslant |\mu_i|(W_m\backslash F)<\frac{1}{2m}\quad (i=1,2),$$

得到

$$\mu_1(F)\leqslant \mu_2(F)+1/m,\quad \mu_2(F)\leqslant \mu_1(F)+1/m.$$

因此，$\mu_1(F)=\mu_2(F)$. ▌

把在拓扑空间 X 里有界连续函数的全体记作 $\mathscr{K}(X)$. 如果 X 完全正常，μ 是 X 上的一个正则的 σ 有限的 (B) 测度，那么每个 $f\in\mathscr{K}(X)$ 有一个积分 $\int f\mathrm{d}\mu$ 与之相对应. 这对应关系记作 μ^*：

$$\mu^*(f)=\int f\mathrm{d}\mu,\quad f\in\mathscr{K}(X).$$

这样，我们看到，一个正则的 σ 有限的(B)测度 μ 决定了一个把 $\mathscr{K}(X)$映入 $\hat{\boldsymbol{R}}^1$ 的映射 μ^*. 而且由推论 3 看到，不同的 μ 决定了不同的 μ^*. 这事实引起一个相反的问题：是不是任意把 $\mathscr{K}(X)$映入 $\hat{\boldsymbol{R}}^1$ 的映射都是关于一个正则的 σ 有限的(B)测度的积分，而且不同的映射决定不同的测度呢？若不加任何限制，答案显然是否定的. 下面说明在某些限制下有肯定的答案. 先介绍几个概念.

对任何拓扑空间 X，$\mathscr{K}(X)$是一个实线性空间，也就是说，对任何 $f\in\mathscr{K}(X)$，$g\in\mathscr{K}(X)$以及任何实数 a,b，$af+bg\in\mathscr{K}(X)$，这里 $af+bg$ 表示一个函数，它在每一点 $P\in X$ 的数值是

$$(af+bg)(P)=af(P)+bg(P).$$

又把 $\mathscr{K}(X)$看作一个尺度空间，其中任何两个元素 f 及 g 的距离定义为

$$d(f,g)=\sup_{P\in X}|f(P)-g(P)|.$$

由这个尺度所产生的 $\mathscr{K}(X)$上的拓扑叫做 $\mathscr{K}(X)$上的**一致收敛的拓扑**.

把一个实线性空间 L_1 映入另一个实线性空间 L_2 的映射 φ，如果对任何 $x,y\in L_1$，以及实数 a,b 都有

$$\varphi(ax+by)=a\varphi(x)+b\varphi(y),$$

φ 就叫做**线性映射**或者**线性算子**. 特别当 L_2 是 $\boldsymbol{R}^1$ 的时候，φ 就叫做**线性实函数**或者**线性实泛函**. 当 L_2 是 $\hat{\boldsymbol{R}}^1$ 的时候叫做**广义线性函数**或者**广义线性泛函**. 当 L_1 及 L_2 都是线性拓扑空间的时候，线性算子就有连续不连续可谈了.

我们注意，$\mathscr{K}(X)$及 $\boldsymbol{R}^1$ 都是线性尺度空间，因此都是线性拓扑空间.

定理 1.6.2(F. Riesz) 假定 X 是一个完全正常空间，$\{X_i\}$是 X 的一列单调增加开子集，$\bigcup_{i=1}^{\infty}X_i=X$. 把在 X 里有界连续，而在某一个 X_i 的余集里等于 0 的函数全体记作 $\mathscr{K}_0(X)$. 如果 ψ 是在 $\mathscr{K}_0(X)$上定义的一个连续线性泛函，那么存在一个唯一的正则

的、σ有限的(B)测度μ，使当$f\in\mathscr{K}_0(X)$时，

$$\psi(f)=\int f\mathrm{d}\mu.$$

证明 (1) 先假定ψ是正的，也就是对任何$f\in\mathscr{K}_0(X)$并且$f\geqslant 0$，都有$\psi(f)\geqslant 0$.

对任何开集$V\subseteq X$，定义

$$\mu^*(V)=\sup\{\psi(f)\mid 0\leqslant f\leqslant\chi_V\text{ 并且 }f\in\mathscr{K}_0(X)\}.$$

然后对任何$E\subseteq X$，定义

$$\mu^*(E)=\inf\{\mu^*(V)\mid E\subseteq V\in\Gamma\}.$$

显然，μ^*是在X的所有子集全体所构成的遗传的σ环上定义的一个外测度.

我们证明对任何一个开集V，

$$\mu^*(V)=\sup\{\mu^*(F)\mid V\supseteq F\in\Phi\}.\tag{1.6.1}$$

如果$\mu^*(V)<+\infty$，那么由定义，对任何一个正数ε，存在一个$f_0\in\mathscr{K}_0(X)$，$0\leqslant f_0\leqslant\chi_V$，使

$$\mu^*(V)<\psi(f_0)+\varepsilon.\tag{1.6.2}$$

又由ψ的连续性知道存在一个正数δ，使

$$|\psi(f_0-f)|<\varepsilon,\quad \sup|f_0-f|<\delta.$$

现在令$F_0=\{P\mid f_0(P)\geqslant\delta/2\}$，那么$V\supseteq F_0\in\Phi$. 又由定义知道$F_0$有一个邻域$V_1$，使

$$\mu^*(F_0)\geqslant\mu^*(V_1)-\varepsilon.$$

可以假定$V_1\subseteq V$. 根据 Urysohn 引理可以做一个函数f，$0\leqslant f\leqslant 1$，

$$f(P)=\begin{cases}1, & P\in F_0,\\ 0, & P\in C(V_1).\end{cases}$$

令$f_1=ff_0$，那么$\sup|f_0-f_1|<\delta$. 因此

$$|\psi(f_0-f_1)|<\varepsilon.$$

另外一方面，$0\leqslant f_1\leqslant\chi_{V_1}$，因此

$$\begin{aligned}\mu^*(F_0)&\geqslant\mu^*(V_1)-\varepsilon\geqslant\psi(f_1)-\varepsilon\\&>\psi(f_0)-2\varepsilon>\mu^*(V)-3\varepsilon.\end{aligned}$$

ϵ 是任意的，所以(1.6.1)成立.

如果 $\mu^*(V)=+\infty$，那么对任何正数 c，总存在一个 $f_0\in\mathscr{K}_0(X)$，$0\leqslant f_0\leqslant\chi_V$ 使

$$\psi(f_0)>c.$$

于是像上面一样地取 F_0 及 V_1 得到

$$\begin{aligned}\mu^*(F_0)&\geqslant\mu^*(V_1)-\varepsilon\geqslant\psi(f_1)-\varepsilon\\&>\psi(f_0)-2\varepsilon>c-3\varepsilon.\end{aligned}$$

因此(1.6.1)也成立.

根据(1.6.1)可以证明任何一个闭集 A 是(μ^*)可测集. 事实上，假设 $E\subseteq X$，那么对任何一个正数 ϵ，E 有一个邻域 V，使得

$$\mu^*(E)\geqslant\mu^*(V)-\varepsilon.\tag{1.6.3}$$

现在取闭集 $D\subseteq V\backslash A$，又取闭集 $C\subseteq V\backslash D$，那么因为 $D\cap C=\varnothing$ 并且 $D\cup C\subseteq V$，所以

$$\mu^*(V)\geqslant\mu^*(D\cup C)=\mu^*(D)+\mu^*(C).$$

后面这等号成立是由于 D 及 C 各有邻域不相交的缘故. C 是开集 $V\backslash D$ 的任意闭子集，因此由(1.6.1)知道

$$\mu^*(V)\geqslant\mu^*(D)+\mu^*(V\backslash D)\geqslant\mu^*(D)+\mu^*(V\cap A).$$

又因为 D 是开集 $V\backslash A$ 的任意闭子集，所以又由(1.6.1)知道

$$\mu^*(V)\geqslant\mu^*(V\backslash A)+\mu^*(V\cap A),$$

因此由(1.6.3)得到

$$\begin{aligned}\mu^*(E)&\geqslant\mu^*(V)-\varepsilon\geqslant\mu^*(V\backslash A)+\mu^*(V\cap A)-\varepsilon\\&\geqslant\mu^*(E\backslash A)+\mu^*(E\cap A)-\varepsilon.\end{aligned}$$

ϵ 是任意的，就有

$$\mu^*(E)\geqslant\mu^*(E\backslash A)+\mu^*(E\cap A).$$

所以 A 是(μ^*)可测的.

(μ^*)可测集全体组成 σ 环. 现在既然任何闭集都是(μ^*)可测的，那么所有的(B)集当然也都是(μ^*)可测的. 因此 μ^* 在(B)上的限制 μ 是(B)上的一个正测度. μ 当然是开 σ 有限的，因为由 μ^* 的定义知道，$\mu(X_i)=\mu^*(X_i)<\infty(i=1,2,\cdots)$. 因此 μ 是一个正则

的 σ 有限的 (B) 测度.

（2） 现在证明

$$\psi(f) = \int f \mathrm{d}\mu, \quad f \in \mathscr{K}_0(X).$$

先考虑 $f \geqslant 0$ 的情形. 由于 ψ 是线性的，我们只要考虑 $0 \leqslant f \leqslant 1$ 的情形. 随便取一个正整数 m，令

$$f_i(P) = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(P) < \dfrac{i-1}{m} \text{ 时}, \\ \left(f(P) - \dfrac{i-1}{m}\right) \Big/ \dfrac{1}{m}, & \text{当 } \dfrac{i-1}{m} \leqslant f(P) \leqslant \dfrac{i}{m} \text{ 时}, \\ 1, & \text{当 } \dfrac{i}{m} < f(P) \text{ 时}, \end{cases}$$

其中 $i = 1, 2, \cdots, m$. 可以看到 $f_i \in \mathscr{K}_0(X)$，并且

$$f(P) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} f_i(P), \quad P \in X.$$

令 $V_i = \left\{P \mid f(P) > \dfrac{i}{m}\right\} \subseteq \{P \mid f_i(P) = 1\}$，那么 $\chi_{V_i} \leqslant f_i$. 因此由定义知道

$$\mu(V_i) = \mu^*(V_i) \leqslant \psi(f_i).$$

因此，

$$\begin{aligned} \psi(f) &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \psi(f_i) \geqslant \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \mu(V_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{i}{m} - \frac{i-1}{m}\right) \mu(V_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{i+1}{m} \mu(V_i \backslash V_{i+1}) - \frac{1}{m} \mu(V_1) \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{m-1} \int_{V_i \backslash V_{i+1}} f \mathrm{d}\mu - \frac{1}{m} \mu(V_1) \\ &\geqslant \int_{V_1} f \mathrm{d}\mu - \frac{1}{m} \mu(V_1). \end{aligned}$$

由于 $f \in \mathscr{K}_0(X)$，$\mu(V_1) = \mu(\{P \mid f(P) > 1/m\}) \leqslant \mu(\{P \mid f(P) >$

$0\})<+\infty$，而 m 是任意的，所以

$$\psi(f) \geqslant \int f \mathrm{d}\mu, \quad 0 \leqslant f \in \mathscr{K}_0(X). \tag{1.6.4}$$

再考虑一般的 $f \in \mathscr{K}_0(X)$. 因为 f 有界，所以存在正数 $M \geqslant |f|$. 令 $A=\overline{\{P|f(P)\neq 0\}}$，那么 A 是闭集. 对任何一个正数 ε，A 有一个邻域 V_1 使

$$\mu(A) = \mu^*(A) \geqslant \mu^*(V_1) - \varepsilon.$$

做一个函数 $g \in \mathscr{K}_0(X)$，使 $0 \leqslant g \leqslant 1$ 并且

$$g(P) = \begin{cases} 1, & P \in A, \\ 0, & P \in C(V_1), \end{cases}$$

那么

$$\mu(A) \geqslant \mu^*(V_1) - \varepsilon \geqslant \psi(g) - \varepsilon.$$

现在 $0 \leqslant f + Mg \in \mathscr{K}_0(X)$，因此，由(1.6.4)得到

$$\begin{aligned} \psi(f) + M\psi(g) &= \psi(f + Mg) \\ &\geqslant \int (f + Mg)\mathrm{d}\mu = \int f\mathrm{d}\mu + M\int g\mathrm{d}\mu \\ &\geqslant \int f\mathrm{d}\mu + M\mu(A) \geqslant \int f\mathrm{d}\mu + M\psi(g) - M\varepsilon. \end{aligned}$$

ε 是任意的，因此得到

$$\psi(f) \geqslant \int f\mathrm{d}\mu, \quad f \in \mathscr{K}_0(X). \tag{1.6.5}$$

由于不限制 $f \geqslant 0$，(1.6.5)对 $-f \in \mathscr{K}_0(X)$ 也必须成立，也就是

$$\psi(-f) \geqslant \int -f\mathrm{d}\mu.$$

因此，$\psi(f) \leqslant \int f\mathrm{d}\mu$，所以得到 $\psi(f) = \int f\mathrm{d}\mu$.

(3) 再考虑 ψ 非正的情况. 对 $0 \leqslant f \in \mathscr{K}_0(X)$，定义

$$\psi^+(f) = \sup_{0 \leqslant g \leqslant f, g \in \mathscr{K}_0(X)} \psi(f),$$

$$\psi^-(f) = \psi^+(f) - \psi(f),$$

那么 ψ^+ 及 ψ^- 都是 $\mathscr{K}_0(X)$ 上的连续线性正泛函，因此各决定了一

个正则的 σ 有限的(B)测度 μ^+ 及 μ^-. 令 $\mu=\mu^+-\mu^-$，那么对 $0\leqslant f\in\mathscr{K}_0(X)$下式成立：

$$\psi(f)=\int f\mathrm{d}\mu.$$

因此由线性的性质知道对任何 $f\in\mathscr{K}_0(X)$成立.

(4) 测度 μ 的唯一性是推论 3 的结论. ▎

上面的定理 1.6.1,1.6.2 及几个推论用开集及连续函数的概念说明了完全正常拓扑空间上的正则 σ 有限(B)测度以及连带的积分概念的特点，下面再谈连续函数跟这种测度所连带的可测函数的关系.

(B)相对于一个(B)测度 ν 有它的完备化$\overline{(B)}$，而 ν 可以扩张为这个$\overline{(B)}$上的一个测度 $\bar{\nu}$. 一个函数关于 ν 可测(就是(B)可测)，就一定关于 $\bar{\nu}$ 可测(就是$\overline{(B)}$可测)；但是一个函数关于 $\bar{\nu}$ 可测，却未必关于 ν 也可测. 因此，为了能广泛一点，下面考虑完备化了的测度.

关于一个测度 μ 可积分的函数全体记作 $\mathscr{L}(\mu)$. 一个函数 $f\in\mathscr{L}(\mu)$的充分而且必要的条件是 f 关于 μ 可测并且 $|f|$ 关于 μ 可积分. 更一般，关于 μ 可测并且绝对值的 p 次幂可积分的函数全体记作 $\mathscr{L}_p(\mu)$或 $\mathscr{L}_p(\mu,X)$，这里 p 是不小于 1 的实数.

定理 1.6.3 假定 X 是一个完全正常空间，μ 是 X 上的一个正则 σ 有限的(B)测度的完备化，那么一个在 X 里定义的函数 $f\in\mathscr{L}_p(\mu)$的充分而且必要的条件是对任何正数 ε，存在一个 $g\in\mathscr{K}_0(X)$，使

$$\int|f-g|^p\mathrm{d}|\mu|<\varepsilon. \tag{1.6.6}$$

证明 *必要性* 先假定 $\mu\geqslant 0$，$f\geqslant 0$，于是 $\mu=|\mu|$.

如果 $f\in\mathscr{L}_p(\mu)$，那么由积分的定义知道对任何一个正数 b，存在有限个可测集 E_i 及有限个非负的实数 $v_i(i=1,2,\cdots,N)$，使

$$0\leqslant\int f^p\mathrm{d}\mu-\sum_{i=1}^{N}v_i\mu(E_i)<b. \tag{1.6.7}$$

当然，$\mu(E_i)<+\infty(i=1,2,\cdots,N)$. 令 $\max\limits_{i=1,\cdots,N} v_i = M$，那么可以取闭集 $C_i\subseteq E_i$ 使

$$\mu(E_i) \geqslant \mu(C_i) \geqslant \mu(E_i) - b/(MN). \qquad (1.6.8)$$

跟证明推论 3 的时候一样，存在有界连续的非负的函数 f_i，$0\leqslant f_i \leqslant 1$ 并且 $f_i>\chi_{C_i}$，

$$0 \leqslant \int f_i \mathrm{d}\mu - \mu(C_i) < b/(MN).$$

于是

$$\int \left| f^p - \sum_{i=1}^{N} v_i f_i \right| \mathrm{d}\mu < 3b.$$

令 $g = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} v_i f_i \right)^{1/p}$，得到

$$\int |f^p - g^p| \mathrm{d}\mu < 3b.$$

假定在一点 P，$f(P)\geqslant g(P)$，那么由

$$\frac{|f(p)-g(p)|^p}{(|f(P)-g(P)|+g(P))^p} + \frac{g(P)^p}{(|f(P)-g(P)|+g(P))^p}$$
$$\leqslant \frac{|f(P)-g(P)|}{|f(P)-g(P)|+g(P)} + \frac{g(P)}{|f(P)-g(P)|+g(P)} = 1$$

得到

$$|f(P)-g(P)|^p + g(P)^p \leqslant [|f(P)-g(P)| + g(P)]^p$$
$$= f(P)^p.$$

因此，移项后得到

$$|f-g|^p \leqslant f^p - g^p. \qquad (1.6.9)$$

反过来，假定在一点 P，$g(P)\geqslant f(P)$，那么把 f 及 g 对掉过来考虑后，仍旧得到(1.6.9). 因此，(1.6.9)对任何一点 P 成立. 所以

$$\int |f-g|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \int (f^p - g^p) \mathrm{d}\mu < 3b.$$

令 $b=\varepsilon/3$，得到(1.6.6).

假定 $\mu\geqslant 0$，但是 f 不一定处处非负，那么就有 $f=f_+ - f_-$，

$f_+\geqslant 0, f_-\geqslant 0$. 由于

$$\int f_+^p \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int |f|^p \mathrm{d}\mu < +\infty,$$

知道 $f_+\in\mathscr{L}_p(\mu), f_-\in\mathscr{L}_p(\mu)$. 所以存在非负的 $g_1\in\mathscr{K}_0(X)$以及 $g_2\in\mathscr{K}_0(X)$,使

$$\int |f_+ - g_1|^p \mathrm{d}\mu < \varepsilon/2^p,$$

$$\int |f_- - g_2|^p \mathrm{d}\mu < \varepsilon/2^p.$$

因此,令 $g=g_1-g_2$,并且用 Minkowski 不等式可得到

$$\int |f - g|^p \mathrm{d}\mu < [(\varepsilon/2^p)^{1/p} + (\varepsilon/2^p)^{1/p}]^p = \varepsilon.$$

最后,如果 μ 不是正测度,那么考虑 $|\mu|$ 好了. 因为 $f\in\mathscr{L}_p(\mu)$,所以 $f\in\mathscr{L}_p(|\mu|)$. 因此存在 $g\in\mathscr{K}_0(X)$,使

$$\int |f - g|^p \mathrm{d}|\mu| < \varepsilon.$$

充分性 假定条件成立,那么存在一列 $g_m\in\mathscr{K}_0(X)$,使

$$\int |f - g_m|^p \mathrm{d}|\mu| < \left(\frac{1}{8^m}\right)^p.$$

因此,如果令

$$A_m = \{P \,\big|\, |f(P) - g_m(P)| \geqslant 1/4^m\},$$

那么

$$|\mu|(A_m) < (1/2^m)^p \leqslant 1/2^m.$$

现在,对每个 m,

$$|f(P) - g_m(P)| < 1/4^m, \quad P \in C(A_m).$$

因此,

$$\begin{aligned} |g_{m+1}(P) - g_m(P)| &\leqslant |g_{m+1}(P) - f(P)| \\ &\quad + |f(P) - g_m(P)| \\ &< \frac{1}{2^m}, \quad P \in C(A_m) \cap C(A_{m+1}). \end{aligned}$$

因此，对任何正整数 N，当 $P \in \bigcap_{m=N}^{\infty} C(A_m)$ 时，

$$|f - g_N| + |g_N - g_{N+1}| + |g_{N+1} - g_{N+2}| + \cdots$$
$$\leqslant \frac{1}{4^N} + \frac{1}{2^N} + \frac{1}{2^{N+1}} + \cdots < +\infty.$$

所以，当 $k \to \infty$ 时，

$$f - g_k = (f - g_N) + (g_N - g_{N+1}) + \cdots + (g_{k-1} - g_k)$$

在 $\bigcap_{m=N}^{\infty} C(A_m)$ 里一致收敛于 0，也就是 $\{g_k\}$ 在 $\bigcap_{m=N}^{\infty} C(A_m)$ 里一致收敛于 f. N 是任意的，所以 $\{g_k\}$ 在 $\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{m=N}^{\infty} C(A_m) = C\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{m=N}^{\infty} A_m\right)$ 里收敛于 f. 由于

$$|\mu|\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{m=N}^{\infty} A_m\right) = \lim_{N\to\infty} |\mu|\left(\bigcup_{m=N}^{\infty} A_m\right)$$
$$\leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{m=N}^{\infty} |\mu|(A_m) \leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{m=N}^{\infty} \frac{1}{2^m} = 0,$$

我们看到 $\{g_k\}$ 几乎处处收敛于 f. g_k 关于 μ 可测，因此 f 关于 μ 也可测.

此外，由 Minkowski 不等式，

$$\int |f|^p \mathrm{d}|\mu| \leqslant \left[\left\{\int |f - g_1|^p \mathrm{d}|\mu|\right\}^{1/p} + \left\{\int |g_1|^p \mathrm{d}|\mu|\right\}^{1/p}\right]^p < +\infty,$$

因此，$f \in \mathscr{L}_p(\mu)$. ▌

以后，假定 μ 是一个测度，函数列 $\{f_m\}$ 在点集 E 里定义. 如果对任何正数 ε，存在一个子集 $S \subseteq E$ 使 $|\mu|(S) < \varepsilon$ 而 $\{f_m\}$ 在 $E \setminus S$ 里一致收敛，那么就说 $\{f_m\}$ 在 E 里（相对于 μ）**几乎一致收敛**. 又假定 f 是一个在 E 里定义的函数，如果对任何正数 ε，f 看作一个在 $E \setminus S$ 里定义的函数（简称 f 在 $E \setminus S$ 里的**限制**，记作 $f|_{(E\setminus S)}$ 或者 $f|(E\setminus S)$）在 $E \setminus S$ 里连续，就说 f 在 E 里（相对于 μ）**几乎连续**.

在定理 1.6.3 的证明过程中，我们看到 $\{g_k\}$ 在 $\bigcap_{m=N}^{\infty} C(A_m) =$

$C(\bigcup\limits_{m=N}^{\infty}A_m)$ 里一致收敛于 f. 现在

$$|\mu|(\bigcup_{m=N}^{\infty}A_m)\leqslant\sum_{m=N}^{\infty}|\mu|(A_m)<\frac{1}{2^{N-1}},$$

所以当 N 充分大的时候可以使 $|\mu|(\bigcup\limits_{m=N}^{\infty}A_m)$ 小于预先指定的任何正数. 因此知道$\{g_k\}$在 X 里几乎一致收敛于 f. 从而 $f|C(\bigcup\limits_{m=N}^{\infty}A_m)$ 连续，因此 f 在 X 里几乎连续. 根据这个事实可以证明

定理 1.6.4 假定 X 是一个完全正常的空间，μ 是 X 上一个正则的 σ 有限的(B)测度的完备化，f 是在 X 里定义的几乎处处有限的函数，那么 f 关于 μ 可测的充分而且必要的条件是 f 在 X 里相对于 μ 几乎连续.

证明 必要性 首先，$X=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}X_i$，这里 X_i 是开集并且满足 $|\mu|(X_i)<+\infty$. 不妨假定 $X_i\subseteq X_{i+1}(i=1,2,\cdots)$.

先假定 f 可测并且有界，那么对每个 X_i，$f|X_i\in\mathscr{L}_1(\mu,X_i)$，因此 $f|X_i$ 在 X_i 里几乎连续. 因此，对任何一个正数 ε，存在 $S_i\subseteq X_i$，使 $|\mu|(S_i)<\varepsilon/2^i$ 并且 $f|(X_i\backslash S_i)$在 $X_i\backslash S_i$ 里连续. 令 $S_1\cup S_2\cup\cdots=S$，那么$|\mu|(S)<\varepsilon$. 我们证明 $f|C(S)$ 连续. 事实上，假定 $P\in C(S)$，那么存在某一个 $X_i\ni P$. X_i 是开集，所以 $f|C(S)$及 $f|(X_i\backslash S)$在 P 同时连续或同时不连续. 由于后者在 P 是连续的，所以前者也连续. 这样就证明了 $f|C(S)$是连续的，因此 f 几乎连续.

假定 f 可测但是无界，那么对任何正整数 m，可以构造一个有界可测函数：

$$f_m(P)=\begin{cases}m, & \text{当 } f(P)>m \text{ 时},\\ f(P), & \text{当 } -m\leqslant f(P)\leqslant m \text{ 时},\\ -m, & \text{当 } f(P)<-m \text{ 时}.\end{cases}$$

对任何正数 ε，取 m 充分大可以使 $|\mu|(\{P\mid f(P)\neq f_m(P)\})<$

$\varepsilon/2$. 令 $D_1=\{P\mid f(P)\neq f_m(P)\}$，那么 $f|C(D_1)=f_m|C(D_1)$. $f_m|C(D_1)$在$C(D_1)$里有界可测，因此存在一个点集 $D_2\subseteq C(D_1)$使 $|\mu|(D_2)<\varepsilon/2$ 并且 $f_m|C(D_1\cup D_2)$在 $C(D_1\cup D_2)$里连续. 因此 $f|C(D_1\cup D_2)$在$C(D_1\cup D_2)$里连续. 我们看到

$$|\mu|(D_1\cup D_2)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,$$

因此 f 几乎连续.

充分性 假定 f 几乎连续，不妨再假定 f 有界(当 f 无界时，可像证明必要性时一样处理)，因此对每个正整数 m，存在一个点集 S_m，使$|\mu|(S_m)<1/2^m$ 并且 $f|C(S_m)$在$C(S_m)$里连续. 令 $T_m=\bigcup_{k=m}^{\infty}S_k$，那么 $|\mu|(T_m)<1/2^{m-1}$. 由定理1.6.1，存在一个开集$V_m\supseteq T_m$ 使 $|\mu|(V_m)<1/2^{m-1}$. 当然 $f|C(V_m)$ 在$C(V_m)$ 里连续. $C(V_m)$闭，所以 $f|C(V_m)$ 可以扩张为一个在 X 里连续的函数 f_m(根据 Tietze 定理). 令 $S=\bigcap_{m=1}^{\infty}V_m$，那么由于 V_m 单调减小并且 $|\mu|(V_m)<+\infty$，得到 $|\mu|(S)=\lim_{m\to\infty}|\mu|(V_m)=0$. 假定一点 $P\in C(S)$，那么存在一个 m 使 $P\in C(V_m)$. 于是就有

$$f(P)=f|_{C(V_k)}(P)=f_k(P),\quad k\geqslant m.$$

因此，

$$\lim_{k\to\infty}f_k(P)=f(P).$$

这就是说，f_k 在$C(S)$里处处收敛于 f. 因此 f_k 几乎处处收敛于 f. f_k 连续，所以 f_k 可测，因此 f 可测. ▌

假定 X 是一个空间(不一定是拓扑空间)，μ 是在一个由 X 的一些子集组成的 σ 环上定义的一个测度，再假定函数 f 关于 μ 可测并且$|f|^p(p\geqslant 1)$关于 μ 可积分，那么说 $f\in\mathscr{L}_p(\mu)$. 对任何两个函数 $f,g\in\mathscr{L}_p(\mu)$，定义

$$\|f-g\|_p=\left(\int|f-g|^p\mathrm{d}|\mu|\right)^{1/p}.$$

如果当 f 及 g 关于$|\mu|$几乎处处相等时就把 f 及 g 看作是$\mathscr{L}_p(\mu)$

的同一个元素，那么由 Minkowski 不等式知道 $\| f-g \|_p$ 可以看作 f 和 g 的距离，称作 f 和 g 的 $\mathscr{L}_p$ 距离. 在这样一个距离的概念下，$\mathscr{L}_p(\mu)$ 是一个尺度空间.

假定一个尺度空间中的一列元素 $\{x_m\}$，当任意指定一个正数 ε 后，一定存在正整数 N，使对任何两个号码 $m>N$ 及 $n>N$，都有

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

这里 d 表示距离，那么称 $\{x_m\}$ 是一个 **Cauchy 序列**.

模仿定理 1.6.3 的证明，可以证明下面这个一般的事实.

引理 3 假定 μ 是任意的测度，$p \geqslant 1$，而 $\{f_m\}$ 是 $\mathscr{L}_p(\mu)$ 的一个 Cauchy 序列（在 $\mathscr{L}_p$ 距离的意义下），那么 $\{f_m\}$ 有一个子列 $\{f_{m_k}\}$ 几乎一致地收敛于一个唯一的元素 $f \in \mathscr{L}_p(\mu)$，并且

$$\lim_{N\to\infty} \int |f_{m_N} - f|^p \mathrm{d}|\mu| = 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} \int |f_{m_N}|^p \mathrm{d}\mu = \int |f|^p \mathrm{d}\mu.$$

证明 对任何正整数 k，存在正整数 m_k，使得当 $l \geqslant n \geqslant m_k$ 时，

$$\| f_l - f_n \|_p < 1/4^k.$$

不妨假定 $m_{k+1} \geqslant m_k$，于是

$$\| f_{m_{k+1}} - f_{m_k} \|_p < 1/4^k, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

因此，如果令 $S_k = \{P \,|\, |f_{m_{k+1}}(P) - f_{m_k}(P)| \geqslant 1/2^k\}$，那么

$$|\mu|(S_k) < 1/2^k,$$

并且

$$|f_{m_{k+1}}(P) - f_{m_k}(P)| < 1/2^k, \quad P \in C(S_k).$$

因此对任何正整数 N，$\sum_{k=N}^{\infty} |f_{m_{k+1}}(P) - f_{m_k}(P)|$ 在 $\bigcap_{k=N}^{\infty} C(S_k) = C\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} S_k\right)$ 里一致收敛. 因此，$\sum_{k=N}^{\infty} (f_{m_{k+1}}(P) - f_{m_k}(P))$ 在 $C\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} S_k\right)$ 里一致收敛. 由 N 是任意的，可得 $\sum_{k=1}^{\infty} (f_{m_{k+1}} - f_{m_k})$ 在

$C(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}S_k)$ 里处处收敛. 现在

$$|\mu|(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}S_k)=\lim_{N\to\infty}|\mu|(\bigcup_{k=N}^{\infty}S_k)\leqslant\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2^{N-1}}=0,$$

所以 $\sum_{k=1}^{\infty}(f_{m_{k+1}}-f_{m_k})$ 几乎处处收敛于一个函数 g.

$\sum_{k=1}^{\infty}(f_{m_{k+1}}-f_{m_k})$ 几乎一致收敛, 所以几乎一致收敛于 g, 也就是当 $i\to\infty$ 时, $(f_{m_i}-f_{m_1})$ 几乎一致收敛于 g. 令 $f=f_{m_1}+g$, 那么 $\{f_{m_i}\}$ 几乎一致收敛于 f.

f 当然可测. 又因为几乎处处

$$\begin{aligned}|f|&\leqslant\left|f_{m_1}+\sum_{k=1}^{\infty}(f_{m_{k+1}}-f_{m_k})\right|\\&\leqslant|f_{m_1}|+\sum_{k=1}^{\infty}|f_{m_{k+1}}-f_{m_k}|,\end{aligned}$$

由 Minkowski 不等式, 不等号右边的级数的和属于 $\mathscr{L}_p(\mu)$. 所以 $f\in\mathscr{L}_p(\mu)$.

注意, 对任何正整数 N, $f=f_{m_N}+\sum_{k=N}^{\infty}(f_{m_{k+1}}-f_{m_k})$, 所以

$$\begin{aligned}\left(\int|f-f_{m_N}|^p d|\mu|\right)^{1/p}&\leqslant\sum_{k=N}^{\infty}\left(\int|f_{m_{k+1}}-f_{m_k}|^p d|\mu|\right)^{1/p}\\&\leqslant\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{4^k}=\frac{1}{3\cdot 4^{N-1}}.\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{N\to\infty}\int|f-f_{m_N}|^p d|\mu|=0.$$

所要证明的另一个等式可以由这个等式得到. ▎

一个尺度空间的任何收敛序列一定是 Cauchy 序列, 但是 Cauchy 序列不一定收敛. 如果一个尺度空间的任何一个 Cauchy 序列一定收敛, 就说这尺度空间是**完备的**.

假定 A 和 B 是两个尺度空间，B 完备．如果存在一个单价的映射（就是一对一的映射）把 A 映入 B，使 A 里任何两点的距离（在 A 的尺度下）都等于它们的像间的距离（在 B 的尺度下），并且 A 的像在 B 里处处稠密，那么说 B 是 A 的**完备化**．

对一个尺度空间 A，总可以用下面的方法构造出一个完备化 B 来．

把 A 的每个 Cauchy 序列 $\{P_m\}$ 看作一个元素 P．假定两个 Cauchy 序列 $\{P_m\}$ 及 $\{Q_m\}$，当 $m\to\infty$ 时 $d(P_m,Q_m)\to 0$，这里 d 表示 A 上的尺度，那么说 $\{P_m\}$ 及 $\{Q_m\}$ 等价．等价的序列看作同一个元素，然后对两个元素 $P=\{P_m\}$ 及 $Q=\{Q_m\}$ 定义它们的距离：

$$\bar{d}(P,Q)=\lim_{m\to\infty}d(P_m,Q_m).$$

不难证明，这样定义是合理的，而且 $\bar{d}(P,Q)$ 满足尺度的条件．于是这些元素 P 的全体在尺度 $\bar{d}$ 下成为一个尺度空间 B．这个 B 就可以看作 A 的完备化．此外，在保持距离的单价映射下，所有的完备化都是等价的．

根据完备化的定义、定理 1.6.3 及引理 3，可以得到

定理 1.6.5 假定 X 是完全正常空间，μ 是 X 上的一个正则、σ 有限的 (B) 测度的完备化，那么 $\mathscr{L}_p(\mu)$ 是 $\mathscr{K}_0(X)$ 在 $\mathscr{L}_p$ 尺度下的完备化．

特别，当 μ 是 E^n 上的 Lebesgue 测度并且 $p=1$ 时，这个定理说明了 Lebesgue 积分跟连续函数的积分的概念的关系．正是由于 $\mathscr{L}_p(\mu)$ 的完备性，使 Lebesgue 积分具有 Riemann 积分所不能比拟的理论意义．

定理 1.6.2 的补充 在定理 1.6.2 的证明过程中，实际上已经证明了下面更广泛的结果：

定理 1.6.2′ 假定 X 是一个完全正常的空间，$\{X_i\}$ 是 X 的一列单调增加的开子集，使 $\bigcup_{i=1}^{\infty}X_i=X$．把在 X 里有界连续并且在 $C(X_i)$ 里等于 0 的函数全体记作 $\mathscr{K}_i$．如果 ψ 是一个在 $\mathscr{K}_0(X)$

里定义的线性泛函，在每个 $\mathscr{K}_i$ 里的限制都连续，那么存在唯一的正则、σ 有限的(B)测度 μ 使当 $f\in\mathscr{K}_c(X)$时，

$$\psi(f)=\int f\mathrm{d}\mu. \tag{1.6.10}$$

在定理 1.6.2 原来的假设下，事实上可以证明存在唯一的正则、σ 有限的(B)测度 μ 使(1.6.10)成立. 这是因为 ψ 在 $\mathscr{K}_c(X)$ 里连续，所以存在一个正数 a，使对所有的 $f\in\mathscr{K}_0(X)$，只要 $\|f\|<a$，都有下式成立：

$$|\psi(f)|<1.$$

考虑任意 $f\in\mathscr{K}_0(X)$，那么 $\dfrac{af}{\|f\|}\in\mathscr{K}_0(X)$，并且 $\left\|\dfrac{af}{\|f\|}\right\|<a$.

因此
$$\left|\psi\left(\frac{af}{\|f\|}\right)\right|=\frac{a}{\|f\|}|\psi(f)|<1.$$

从而有
$$|\psi(f)|<\frac{1}{a}\|f\|.$$

所以当 $0\leqslant f\in\mathscr{K}_0(X)$时，

$$\psi_+(f)=\sup_{0\leqslant g\leqslant f}\psi(g)<\frac{1}{a}\|f\|.$$

因此

$$\mu_+(X)=\sup\{\psi_+(f)\,|\,f\in\mathscr{K}_0(X),\text{并且 }0\leqslant f\leqslant\chi_X\}<1/a.$$

同样
$$\mu_-(X)<1/a.$$

定理 1.6.2″ 假定 X 是完全正常的空间，$\{X_i\}$是一列开集，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}X_i=X$，并且 $\overline{X}_i\subseteq X_{i+1}(i=1,2,\cdots)$. 如果 ψ 是在 $\mathscr{K}_0(X)$上定义的一个正的线性泛函，那么存在一个唯一的正则、σ 有限的正(B)测度 μ 使当 $f\in\mathscr{K}_0(X)$时，

$$\psi(f)=\int f\mathrm{d}\mu.$$

证明 由定理 1.6.2′，只要证明 ψ 在每个 $\mathscr{K}_i$ 上的限制是连续的就行了. 随便取一个 $\mathscr{K}_i$，作一个函数 $h\in\mathscr{K}_{i+1}$，$h\geqslant0$，并且当 $P\in X_i$ 时，$h(P)=1$. 那么对任何一个 $f\in\mathscr{K}_i$，

$$\frac{|f|}{\|f\|} \leqslant h$$

成立. 令 $\psi(h)=M$,那么由于 $|f| \geqslant f$,得到

$$|\psi(f)| \leqslant \psi(|f|) \leqslant \psi(\|f\| h) \leqslant M\|f\|, \quad f \in \mathscr{K}_i.$$

因此,对任何正数 ε,只要取 $\delta=\varepsilon/M$,那么对任何 $f \in \mathscr{K}_i$ 及 $g \in \mathscr{K}_i$,当 $\|f-g\|<\delta$ 时,

$$|\psi(f-g)| \leqslant M\|f-g\|<\varepsilon.$$

因此,ψ 在 $\mathscr{K}_i$ 上的限制是连续的(其实是一致连续的). ▍

以上说明了完全正常空间上的正则、σ 有限的(B)测度的主要特点. 这些讨论推广了古典的 Radon 测度的理论. 一个 Radon 测度就是 $\boldsymbol{E}^n$ 上的一个(B)测度,它在 $\boldsymbol{E}^n$ 的每个有界子集里所分布的质量有限,因此是开 σ 有限的,也因此是正则、σ 有限的.

我们这里所作的这种推广跟别的文献上的不一样. 通常大家把 Radon 测度的概念推广为**局部紧致的**(即每一点有邻域,它的包紧致)Hausdorff 空间上的正则(B)测度,不过要求在每个紧致集上分布有限的质量①. 这种推广是由于 Lie 群的分析表示理论的需要产生的,后来影响了分析的许多分支,首先是调和分析,其次是概率论及位势论. 但是完全正常空间,甚至于尺度空间,都未必局部紧致. 因此这种推广对于像位势论这样的分支并不是完全适当的. 所以这里用完全正常空间来代替. 当然,局部紧致空间也未必是完全正常的,甚至于未必是正常的. 这里不打算讨论 Radon 测度理论的不同的推广之间的关系.

习　题

1. 证明 $\boldsymbol{E}^n$ 的子集族(B)就是有理细胞全体所繁殖的 σ 环.

2. (1) 证明在尺度空间 X 的一个紧致子集 K 里定义并且

---

① 可以参考 Halmos, Measure Theory,第五章. 有中译本《测度论》(王建华译),科学出版社,1958,1980.

连续的函数 f 是一致连续的，就是对任何正数 ϵ，存在一个正数 δ，使对任何距离不超过 δ 的两点 $P\in K$ 及 $Q\in K$，$|f(P)-f(Q)|<\epsilon$ 成立.

(2) 假定 μ 是尺度空间 X 上的一个正则、σ 有限的(B)测度的完备化，f 是 X 的紧致子集 K 里定义并且连续的函数，那么 $\int_K f\mathrm{d}\mu$ 可以用 Riemann 方式定义如下：

$$\int_K f\mathrm{d}\mu=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}f(Q_i)\mu(E_i),$$

这里 $\bigcup_{i=1}^{m}E_i=K$，每个 E_i 是开集或者闭集，$\lim_{m\to\infty}\sup_{1\leqslant i\leqslant m}d(E_i)=0$，$d(E_i)$ 表示 E_i 的直径，并且 $\lim_{m\to\infty}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|\mu|(E_i\cap E_j)=0$.

又 $\bigcup_{i=1}^{m}E_i=K$ 这条件可以改作

$$\lim_{m\to\infty}\left(|\mu|\left(K\Big\backslash\bigcup_{i=1}^{m}E_i\right)+|\mu|\left(\bigcup_{i=1}^{m}E_i\Big\backslash K\right)\right)=0.$$

§1.7 测度的浑收敛

假定 X 是一个完全正常空间，$\{X_i\}$是 X 的一列单调增加的开子集使 $\bigcup_{i=1}^{\infty}X_i=X$. 再假定 μ 及 $\mu_m(m=1,2,\cdots)$是 X 上可列个正则的、σ 有限的(B)测度，$|\mu_m|(X_i)<+\infty$. 如果对每个 $f\in\mathscr{K}_0(X)$，

$$\lim_{m\to\infty}\int f\mathrm{d}\mu_m=\int f\mathrm{d}\mu,$$

那么说$\{\mu_m\}$**浑收敛**于 μ，μ 是$\{\mu_m\}$的**浑极限**.

由定义，浑极限是唯一的.

下面我们在某种特殊情形下进一步研究浑收敛的概念. 所加的限制看起来有点繁琐，不过所谈的特殊情形，实际上却包括了

E^n 上的 Radon 测度作为特例. 为了便于理解和记忆,读者可以用这种特例当模型来设想.

定理 1.7.1 假定 X 是一个完全正常空间,$\{X_i\}$是 X 的一列开子集使 $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X$ 并且 $\overline{X}_i \subseteq X_{i+1}, i = 1,2,\cdots$. 再假定 $\{\mu_m\}$ 是 X 上一列正则的、σ 有限的 (B) 正测度,对每一个 $f \in \mathscr{K}_0(X)$, $\left\{\int f \mathrm{d}\mu_m\right\}$ 都收敛 $\left(\text{当然}, \int f \mathrm{d}\mu_m \text{ 有限}\right)$,那么 $\{\mu_m\}$ 浑收敛.

证明 对每个 $f \in \mathscr{K}_0(X)$,令

$$\psi(f) = \lim_{m\to\infty} \int f \mathrm{d}\mu_m,$$

那么 $\psi(f)$ 是一个 $\mathscr{K}_0(X)$ 上的正线性泛函. 因此,由定理 1.6.2″ 知道,存在一个正则的 σ 有限的 (B) 正测度 μ,使

$$\psi(f) = \int f \mathrm{d}\mu.$$

因此,$\{\mu_m\}$ 浑收敛于 μ. ▌

当 $\{\mu_m\}$ 浑收敛时,作为一列集函数来看,$\{\mu_m\}$ 有什么特点呢?我们考虑尺度空间的特殊情形,先证明

引理 1 假定 X 是一个尺度空间,μ 是 X 上的一个正则的、σ 有限的 (B) 测度,那么对 X 的任何一个紧致子集 E 及 E 的任何一个邻域 U,存在一个开集 V,使 $E \subseteq V \subseteq U$ 且

$$|\mu|(B(V)) = 0.$$

证明 我们先证明:对一点 $P \in X$,存在一个正数 a,使至多只有可列个正数 $r \in (0,a)$ 满足

$$|\mu|(S(P,r)) > 0,$$

这里 $S(P,r)$ 表示用 P 当中心,r 当半径的球面.

事实上,μ 是开 σ 有限的,因此存在一个开集 $G \ni P$ 使 $|\mu|(G) < +\infty$,而且存在一个正数 a 使闭球 $\overline{K(P,a)} \subseteq G$. 因此,$|\mu|(\overline{K(P,a)}) < +\infty$. 从而对每个正整数 m,下列集合是一个有限集:

$$\{r \mid |\mu|(S(P,r)) \geqslant 1/m \text{ 并且 } 0 < r < a\}.$$

因此下列集合是一个可列集：

$$\{r \mid |\mu|(S(P,r)) > 0 \text{ 并且 } 0 < r < a\}$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{r \mid |\mu|(S(P,r)) \geqslant \frac{1}{m} \text{ 并且 } 0 < r < a\right\}.$$

这就证明了上面所说的事实.

现在假定 E 是 X 的一个紧致子集，U 是 E 的一个邻域. 由上面的事实知道用每一点 $P \in E$ 作中心可以做一个球 K 使 $\overline{K} \subseteq U$ 并且 $|\mu|(B(K))=0$. 对所有的 $P \in E$，这些球的全体覆盖了 E. 因此存在有限个这种球 $K_1, \cdots, K_N$，使

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} K_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} \overline{K}_i \subseteq U.$$

令 $V = \bigcup_{i=1}^{N} K_i$，那么 V 有引理 1 所说的性质. ▌

按照数学家们近来的习惯，局部紧致的 Hausdorff 空间上的紧致有限(在每个紧致子集里全变差有限)的正则的 (B) 测度叫做 **Radon 测度**(**H. Cartan**)，或者 **Baire 测度**(**Halmos**)，或者**正则的 Borel 测度**(**Halmos**). 可以看到，特别对于局部紧致的有可列拓扑底的尺度空间，正则的 σ 有限的 (B) 测度跟 Radon 测度是相同的概念.

引理 2 从一个局部紧致、有可列拓扑底的空间 X 中可以取一列开子集 $\{X_i\}$，每一个 $\overline{X}_i$ 紧致，并且 $\overline{X}_i \subseteq X_{i+1}$，$\bigcup X_i = X$.

证明 对每一点 $P \in X$ 有一个邻域 V 使 $\overline{V}$ 紧致. 这些 V 全体覆盖了 X. 另外一方面，假设 $\{G_i\}$ 是一组可列的拓扑底，那么每个 V 都是一些 G_i 的和集. 这些 G_i 是 V 的子集，因此 $\overline{G}_i$ 紧致(因为 $\overline{G}_i \subseteq \overline{V}$，而紧致集的闭子集是紧致的). 因此可以从这组拓扑底中挑出一部分有紧致包的 G_i，它们全体记作 $\{H_i\}$，那么 $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = X$.

令 $X_1 = H_1$，那么 $\overline{X}_1$ 紧致. $\overline{X}_1$ 被有限个 H_i 所覆盖，这有限个 H_i 的和集记作 X_2，那么 $\overline{X}_1 \subseteq X_2$ 并且 $\overline{X}_2$ 紧致. 同样，$\overline{X}_2$ 被有限个

H_i 所覆盖，再把这有限个 H_i 的和集记作 X_3，那么 $\overline{X}_2 \subseteq X_3$ 并且 $\overline{X}_3$ 紧致. 这样继续下去就得到一列 $\{X_i\}$ 合乎所说的要求. ▌

假定函数 f 在一个拓扑空间里定义，那么 $\overline{\{P \mid f(P) \neq 0\}}$ 称作 f 的**支柱**或**支集**.

对局部紧致并且有可列底的空间 X，其中有引理 2 所说的那样一列 X_i，$\mathscr{K}_0(X)$（见定理 1.6.2）就是支柱紧致的连续函数全体. 以后如果没有另外声明，对一个局部紧致的有可列底的拓扑空间，$\mathscr{K}_0(X)$ 都表示支柱紧致的连续函数全体.

定理 1.7.2 假定 X 是局部紧致的有可列底的尺度空间，μ 及 μ_m 是 X 上一列 Radon 正测度. 如果对每个开子集 E，当 $\overline{E}$ 紧致并且 $\mu(B(E))=0$ 时，都有

$$\lim_{m\to\infty} \mu_m(E) = \mu(E), \tag{1.7.1}$$

那么 $\{\mu_m\}$ 浑收敛于 μ. 反过来，如果 $\{\mu_m\}$ 浑收敛于 μ，那么对任何一个 (B) 子集 E，只要 $\mu(B(E))=0$，(1.7.1) 就成立.

证明 假定 $f \in \mathscr{K}_0(X)$，f 的支柱记作 U，那么 f 在 U 里一致连续. 所以可以作一列有限开覆盖族 $\{\mathscr{S}_k\}$，使当 k 充分大的时候，f 在属于 $\mathscr{S}_k$ 的每个开集 E_i 上的振幅（极大值与极小值的差）小于 ϵ. 现在选定一个充分大的 k 使上面的事实成立，并且使

$$\left| \int f \mathrm{d}\mu - \sum_{E_i \in \mathscr{S}_k} f(P_i)\mu(E_i) \right| < \epsilon,$$

这里 $\{E_i\}$ 表示组成 $\mathscr{S}_k$ 的开集全体，$P_i \in E_i$. 由 §1.6 习题 2，这样选择 $\mathscr{S}_k$ 是可能的. 非但这样，由引理 1，可以选择 $\mathscr{S}_k$ 使所有的 $\overline{E}_i$ 紧致并且 $\mu(B(E_i))=0$.

另外，由于 $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_m(E_i \cap E_j) = \mu(E_i \cap E_j)$，所以对每个 μ_m，当 h 充分大时，$\mathscr{S}_h$ 也符合 §1.6 习题 2 所说的要求. 因此对每个 μ_m，存在一个 $k_m \geqslant k$ 使当 $h > k_m$ 时，

$$\left| \int f \mathrm{d}\mu_m - \sum_{F_j \in \mathscr{S}_h} f(Q_j)\mu_m(F_j) \right| < \epsilon.$$

不妨假定每个 F_j 包含在某一个 E_i 里，所以

$$\sum_{E_i\in\mathscr{S}_k} f(P_i)\mu_m(E_i) = \sum_{E_i\in\mathscr{S}_k} f(P_i)\sum_{F_j\subseteq E_i}\mu_m(F_j),$$

$$\sum_{F_j\in\mathscr{S}_h} f(Q_j)\mu_m(F_j) = \sum_{E_i\in\mathscr{S}_k}\ \sum_{F_j\subseteq E_i} f(Q_j)\mu_m(F_j).$$

因此

$$\sum_{F_j\in\mathscr{S}_h} f(Q_j)\mu_m(F_j) - \sum_{E_i\in\mathscr{S}_k} f(P_i)\mu(E_i)$$

$$= \sum_{E_i\in\mathscr{S}_k}\ \sum_{F_j\subseteq E_i}(f(Q_j) - f(P_i))\mu_m(F_j)$$

$$+ \sum_{E_i\in\mathscr{S}_k} f(P_i)(\mu_m(E_i) - \mu(E_i)).$$

由于 $\mu_m(F_j)\to\mu(F_j)$，可以选择正数 N，使

$$|\mu_m(E_i) - \mu(E_i)| < \varepsilon,\quad m > N,\ E_i\in\mathscr{S}_k,$$

因此

$$\Big|\sum_{F_j\in\mathscr{S}_h} f(Q_j)\mu_m(F_j) - \sum_{E_i\in\mathscr{S}_k} f(P_i)\mu(E_i)\Big| < \varepsilon M + \varepsilon\max_{P\in\bar{U}}|f(P)|.$$

从而有

$$\left|\int f\mathrm{d}\mu - \int f\mathrm{d}\mu_m\right| < a\varepsilon,\quad m > N,$$

这里 a 是一个常数. 所以 $\{\mu_m\}$ 浑收敛于 μ.

现在证明定理的第二部分. 假定正测度列 $\{\mu_m\}$ 浑收敛于 μ，那么 μ 显然是一个正测度. 因为不然的话，有一个紧致集 E 使 $\mu(E)<0$. 于是由 Urysohn 引理，可以作一个连续函数 f，$0\leqslant f\leqslant 1$，在 E 上 $f=1$，而在 E 的一个邻域 V 的外部 $f=0$ 并且 $\mu(V\setminus E)<|\mu|(E)$. 因此 $\int f\mathrm{d}\mu < 0$，这与 $\lim\limits_{m\to\infty}\int f\mathrm{d}\mu_m = \int f\mathrm{d}\mu$ 这个假定矛盾.

现在假定有一个 (B) 集 E，$\mu(B(E))=0$ 而 $\lim\limits_{m\to\infty}\mu_m(E) = \mu(E)$ 不成立，那么一定存在一个正数 a，使有无限个 m 满足

$$|\mu_m(E) - \mu(E)| > a. \tag{1.7.2}$$

作两个开集 U 和 V 使 $V\supset\bar{U}\supset U\supset B(E)$，并且 $\mu(V)<a/2$. 可以作一个连续函数 f 使 $0\leqslant f\leqslant 1$，而在 $\bar{E}$ 上 $f=1$，在 $E\cup U$ 的外部

$f=0$. 于是

$$\int f \mathrm{d}\mu = \mu(E) + \int_{U \cap C(E)} f \mathrm{d}\mu,$$

$$\int f \mathrm{d}\mu_m = \mu_m(E) + \int_{U \cap C(E)} f \mathrm{d}\mu_m.$$

对几乎所有的 m,

$$\left| \int f \mathrm{d}\mu - \int f \mathrm{d}\mu_m \right| < \frac{a}{2}.$$

所以由(1.7.2)知道存在无数多个 m,使

$$\left| \int_{U \setminus E} f \mathrm{d}\mu_m - \int_{U \setminus E} f \mathrm{d}\mu \right| > \frac{a}{2}.$$

可是 $0 \leqslant \int_{U \setminus E} f \mathrm{d}\mu < a/2$, 所以有无数多个 $n_i (i=1,2,\cdots)$,而 $n_1 < n_2 < \cdots$,使

$$\mu_{n_i}(U) \geqslant \int_{U \setminus E} f \mathrm{d}\mu_{n_i} > \frac{a}{2}.$$

现在作一个连续函数 g,$0 \leqslant g \leqslant 1$,在 U 上 $g=1$ 而在 $C(V)$ 上 $g=0$,那么

$$\int g \mathrm{d}\mu_{n_i} \geqslant \mu_{n_i}(U) > \frac{a}{2},$$

$$\int g \mathrm{d}\mu \leqslant \mu(V) < \frac{a}{2}.$$

这表示 $\int g \mathrm{d}\mu_m$ 不收敛于 $\int g \mathrm{d}\mu$, 跟假设矛盾. ∎

定理 1.7.3(选择定理) 假定 X 是局部紧致的有可列底的尺度空间,$\{\mu_m\}$是 X 上一列 Radon 正测度,再假定对每个紧致子集 C,$\{\mu_m(C)\}$有界,那么$\{\mu_m\}$有浑收敛的子列.

证明 由引理 2,X 是可列个单调增加的开子集 X_i 的和集,每个 $\overline{X}_i$ 紧致.

对每个 $\overline{X}_i$ 构造一列有限开覆盖族$\{\mathscr{S}_k^i\}$使

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{E_l \in \mathscr{S}_k^i} d(E_l) = 0,$$

这里 $d(E_i)$ 表示 E_i 的直径. 对固定的 k，把同属于 $\mathscr{S}_k^i$ 的每两个开集 E_i 及 E_j 的差集及交集作出来，于是得到有限个两两不相交的 (B) 集，这些 (B) 集全体记作 $\mathscr{J}_k^i$. $\mathscr{J}_k^i$ 是 $\overline{X}_i$ 的一个有限的覆盖族. 对所有这些覆盖族，其中的 (B) 集一共有可列个，记为 $D_j(j=1,2,\cdots)$.

由假设，对每个 D_j，$\{\mu_m(D_j)\}$ 有界. 因此首先可以选择 $\{\mu_m\}$ 的一个子列 $\{\mu_m^{(1)}\}$ 使 $\{\mu_m^{(1)}(D_1)\}$ 收敛. 再从 $\{\mu_m^{(1)}\}$ 中选择一个子列 $\{\mu_m^{(2)}\}$ 使 $\{\mu_m^{(2)}(D_2)\}$ 收敛. 又可以从 $\{\mu_m^{(2)}\}$ 中选择一个子列 $\{\mu_m^{(3)}\}$ 使 $\{\mu_m^{(3)}(D_3)\}$ 收敛. 因此得到一列子列 $\{\{\mu_m^{(i)}\}\}$，满足 $\{\mu_m^{(i)}\}\supseteq\{\mu_m^{(i+1)}\}$ 并且 $\{\mu_m^{(i)}(D_i)\}$ 收敛. 现在令 $\nu_m=\mu_m^{(m)}$，那么对每个 D_i，$\{\nu_m(D_i)\}$ 收敛.

由定理 1. 7. 2 证明的前半部分所用的办法可以证明：对任何一个 $f\in\mathscr{K}_0(X)$，

$$\int f\mathrm{d}\nu_m-\int f\mathrm{d}\nu_n\to 0,\quad m>n\to\infty.$$

因此 $\left\{\int f\mathrm{d}\nu_m\right\}$ 收敛. 由定理 1. 7. 1 知道 $\{\nu_m\}$ 浑收敛. ∎

对于变号测度的浑收敛，我们先证明

引理 3 如果 X 是局部紧致的有可列底的尺度空间. 假定 X 上一列 Radon 测度 $\{\mu_m\}$ 浑收敛，那么每一点 $P\in X$ 有一个邻域 U 使 $\mu_{m+}(U)<M$ 且 $\mu_{m-}(U)<M$，这里 M 是与 m 无关、但可能与 U 有关的一个正数.

证明 假定 $\{\mu_m\}$ 浑收敛于 μ. 随便取一点 $P\in X$，作 P 的一个邻域 U_1 使 $\mu_+(U_1)$ 及 $\mu_-(U_1)$ 都有限. 我们证明：$\{\mu_{m+}(U_1\setminus\{P\})\}$ 是有界的，这里 $\{P\}$ 表示单独由 P 构成的点集(如图 1).

要不然，存在一个 $\nu_1\in\{\mu_m\}$，使

$$\nu_{1+}(U_1\setminus\{P\})>4.$$

因此，存在一个紧致集 $E_1\subset(U_1\setminus\{P\})$，使

$$\nu_1(E_1)>4.$$

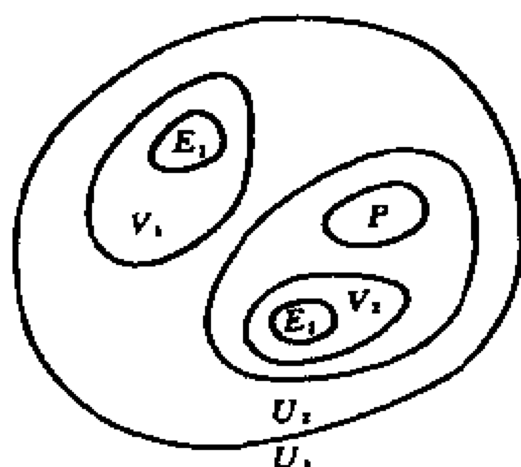


图 1

可以取一个开集 $V_1\supset E_1$，$\overline{V}_1\subset(U_1\setminus\{P\})$，使 $\nu_{1+}(V_1\setminus E_1)$ 及 $\nu_{1-}(V_1\setminus E_1)$ 小得使下式成立：

$$\nu_1(E_1)-\nu_{1+}(V_1\setminus E_1)-\nu_{1-}(V_1\setminus E_1)>4.$$

定义一个连续函数 f_1，它在 E_1 上等于 1，在 V_1 以外等于 0，在 $V_1\setminus E_1$ 上 $0\leqslant f_1\leqslant 1$. 于是

$$\int f_1 \mathrm{d}\nu_1>4.$$

可是，

$$\lim_{m\to\infty}\int f_1\mathrm{d}\mu_m=\int f_1\mathrm{d}\mu.$$

等号右边的积分的绝对值小于

$$\mu_+(\overline{V}_1)+\mu_-(\overline{V}_1)+1<\mu_+(U_1)+\mu_-(U_1)+1,$$

所以存在一个 m_1，使

$$\left|\int f_1\mathrm{d}\mu_m\right|<\mu_+(U_1)+\mu_-(U_1)+1,\quad m>m_1. \tag{1.7.3}$$

现在作 P 的一个邻域 U_2，使 $(U_1\setminus\overline{V}_1)\supset\overline{U}_2$，并且使

$$\nu_{1+}(U_2\setminus\{P\})+\nu_{1-}(U_2\setminus\{P\})<1.$$

同样道理，存在一个测度 $\nu_2\in\{\mu_m|m>m_1\}$ 及一个连续函数 f_2，$0\leqslant f_2\leqslant 1$，$f_2$ 的支柱包含在 $U_2\setminus\{P\}$ 中，而

$$\int f_2 \mathrm{d}\nu_2 > 4^2.$$

这样继续下去，得到一列连续函数$\{f_k\}$及一列测度$\{\nu_k\}\subseteq\{\mu_m\}$使下列事实成立：

(1) $0\leqslant f_k\leqslant 1$，$f_k$ 的支柱$\subseteq(U\setminus\{P\})$；当 $i\neq j$ 时 f_i 及 f_j 的支柱不相交.

(2) $\int f_k \mathrm{d}\nu_k > 4^k,\ k=1,2,\cdots.$

(3) 令 $f=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(f_k/2^k)$，那么 f 连续且 $0\leqslant f\leqslant 1$.

(4) $\left|\int\sum\limits_{k=1}^{j-1}\frac{f_k}{2^k}\mathrm{d}\nu_j\right| < \mu_+(U_1)+\mu_-(U_1)+1.$

(5) $\left|\int\sum\limits_{k=j+1}^{\infty}\frac{f_k}{2^k}\mathrm{d}\nu_j\right| \leqslant \nu_{j+}(U_{j+1}\setminus\{P\})+\nu_{j-}(U_{j+1}\setminus\{P\})<1,$

这里 U_k 之于 ν_{k-1} 也好像 U_2 之于 ν_1.

由(2)，(3)，(4)，(5)得到

$$\int f\mathrm{d}\nu_k > 2^k-\mu_+(U_1)-\mu_-(U_1)-2\to\infty,\quad k\to\infty.$$

这跟$\{\mu_m\}$浑收敛的假设矛盾. ∎

如果一个点集的任何一个开覆盖族包含一个有限的子覆盖族，那么这点集是紧致的. 由 Heine-Borel 定理知道，E^n 中一个点集紧致的充分而且必要的条件是有界且闭. 由引理 3 及紧致的概念知道，如果 E^n 上一列测度$\{\mu_m\}$浑收敛，那么对于任何一个紧致集 C，$\{\mu_{m+}(C)\}$及$\{\mu_{m-}(C)\}$有界.

由此得到

定理 1.7.4 X 上一列 Radon 测度$\{\mu_m\}$浑收敛的充分而且必要的条件是：

(1) $\{\mu_{m+}\}$及$\{\mu_{m-}\}$在任何一个紧致集上的数值有界.

(2) $\{\mu_{m+}\}$的任何一个浑收敛子列$\{\mu_{m_k+}\}$的相应的子列$\{\mu_{m_k-}\}$浑收敛，并且它们的极限的差与$\{\mu_{m_k}\}$的选择无关.

X 上的正 Radon 测度的浑收敛的概念是 Radon 及 Frostman 创始的. de la Vallée Poussin 用定理 1.7.2 所说的条件当作 $\boldsymbol{E}^n$ 上 Radon 测度收敛的定义,在 $\boldsymbol{E}^n$ 的特殊情形下建立了定理 1.7.2 的前半部分. H. Cartan 在局部紧致的 Hausdorff 空间的测度全体上,利用上面所谈的浑收敛的概念定义了**浑(vague)拓扑**. 像这一节所说明的浑收敛与de la Vallée Poussin 的收敛概念对正 Radon 测度是等价的,不过对变号测度不等价. 事实上,de la Vallée Poussin 根据他的收敛定义,对选择定理作了错误的推广. 另外一方面,H. Cartan 定义是把测度当作 $\mathscr{K}_0(X)$上的泛函来看的. 原先这概念跟 de la Vallée Poussin 的收敛概念的关系并不清楚. 本节内容跟更一般的讨论见《厦门大学学报》(1962 年第 4 期).

习　题

1. 假定 X 是完全正常的空间,点列$\{P_m\}\subseteq X$. 证明:$\{\epsilon_{P_m}\}$浑收敛的充分而且必要的条件是$\{P_m\}$收敛.

2. 用 τ 表示 $\boldsymbol{E}^n$ 上的 Lebesgue 测度. 对一个正整数 m,C_m 表示细胞:

$$1/(2m) < x^i < 1/m, \quad i = 1,2,\cdots,n,$$

τ 在 C_m 上的限制记为 τ_m. 证明$\{2^n m^n \tau_m\}$浑收敛. 极限是什么测度?

3. E 上的测度列 $\varepsilon_{1/m}-\varepsilon_{-1/m}(m=1,2,\cdots)$浑收敛吗? 极限是什么? 又 $m\varepsilon_{1/m}-m\varepsilon_{-1/m}$浑收敛吗?

第二章　位势及上调和函数

§2.1　位势概念的由来

假定三维欧氏空间中某一点 O 有一个点源泉，每单位时间流出体积等于常数 k 的理想流体．要是没有其他的因素，那么流体的质点将沿从 O 点出发的射线流动，并且速度跟射线的方向无关．因此在空间中任意一点 P，流体质点的速度可以表示为

$$\boldsymbol{v}(P)=\boldsymbol{r}_0 v(r),\tag{2.1.1}$$

这里 r 表示 O 到 P 的距离，$\boldsymbol{r}_0$ 表示从 O 到 P 这方向的单位向量．

速度的大小 $v(r)$ 可以这样决定：考虑用 O 点作中心、半径等于 a 的球面 $\boldsymbol{\Sigma}$，由于流体每单位时间内流出 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的体积是 k，我们得到

$$k=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{v}(P)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}=\iint_{\Sigma}v(a)\mathrm{d}\sigma=4\pi a^2 v(a).$$

这表示

$$v(a)=\frac{k}{4\pi}\frac{1}{a^2}.$$

由此得到

$$\boldsymbol{v}(P)=\boldsymbol{r}_0\frac{k}{4\pi}\frac{1}{r^2},\tag{2.1.2}$$

由于 $\frac{1}{r^2}$ 是 $\left(-\frac{1}{r}+c\right)$ 对 r 的导数，因此

$$\nabla\left(-\frac{k}{4\pi}\frac{1}{r}\right)=\boldsymbol{r}_0\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{k}{4\pi}\frac{1}{r}\right)=\boldsymbol{r}_0\frac{k}{4\pi}\frac{1}{r^2}.$$

这说明 $\boldsymbol{v}(P)$ 这向量场有位势函数

$$\varphi(P) = -\frac{k}{4\pi}\frac{1}{r}, \qquad (2.1.3)$$

这里我们假定在无限远的地方位势等于 0，于是积分常数取作 0.

现在假定源泉连续地分布在一个区域 V 上，这时候流体速度场的位势函数可以这样考虑：从 V 里任意取一个小区域 δV 来看，假定分布在 δV 里的源泉每单位时间流出体积等于 δk 的理想流体，又把这部分源泉在任意点 P 所产生的位势的数值记作 $\delta\Phi(P)$，这里也同样假定在无限远处 $\delta\Phi=0$，那么由(2.1.3)得到

$$\delta\Phi(P) \approx -\frac{\delta k}{4\pi r} = -\frac{\overline{\mu}\delta V}{4\pi r},$$

这里 r 表示 P 到 δV 里任意取定的一点 Q 的距离，$\overline{\mu}$ 表示 δV 的每单位体积在单位时间内流出的平均的流体体积. 因此，所求的位势是

$$\Phi(P) = \sum_{\delta V \subset V} \delta\Phi(P) = -\iiint_V \frac{\mu}{4\pi r} \mathrm{d}V. \qquad (2.1.4)$$

在这积分中，μ 表示当 δV 收敛于一点 Q 时 $\overline{\mu}$ 的极限，也就是速度场在 Q 点的散度. 位势 $\Phi(P)$ 称作 $\mu(P)$ 的 **Newton 位势**.

μ 既然是速度场的散度，那么也就是位势 $\Phi(P)$ 的梯度的散度，所以得到 Poisson 方程

$$\Delta\Phi(P) = \iiint_V \Delta \frac{-\mu(Q)}{4\pi r_{PQ}} \mathrm{d}V_Q = \mu(P), \qquad (2.1.5)$$

这里 Q 表示 V 里的变动点，r_{PQ} 表示 P 和 Q 这两点的距离，$\mathrm{d}V_Q$ 表示这三重积分是对变动点 Q 取的. 在上面的推理过程中，(2.1.5)式里的 Laplace 算子只对 $P \in V$ 有意义. 不过如果把没有源泉的点看作是散度等于 0 的源泉的所在地，那么源泉分布的区域 V 总可以看作全空间，于是(2.1.5)这个方程对空间中任何一点 P 有意义. 只不过当 P 落在没有源泉的区域时，$\mu(P)=0$，而(2.1.5)变成 Laplace 方程.

称作 Newton 位势是由于 Newton 的著名的万有引力学说. 当一个质量等于 m 的质点出现在三维欧氏空间中一点 O 的时候，

它所产生的万有引力场在任意一点 P 的强度是

$$f(P) = - r_0 G \frac{m}{r^2}.$$

这是假想在 P 点放一个单位质点时该质点所受到的引力，G 表示一个常数. 由于跟(2.1.2)形式上类似，这引力场也有一个位势 $\varphi(P) = Gm \frac{1}{r}$. 同样道理假定质量连续地分布在一个区域 V 上，那么它所产生的引力场的位势应该是

$$\Phi(P) = \iiint\limits_V G\rho \frac{1}{r} \mathrm{d}V,$$

这里的 ρ 是每单位体积所包含的质量，也就是密度. 由(2.1.5)知道 $\Delta\Phi(P) = -4\pi G\rho$. 假定采用适当的单位，可以使 $4\pi G = 1$，于是万有引力场的散度就等于物质的负密度. 为什么万有引力跟质量成正比而跟距离的平方成反比，到现在还缺乏理论的说明，不过根据上面的数学推理，我们知道这跟为什么引力场的散度跟物质密度成正比这样的问题是等价的. 假如我们能够回答后一个问题，那么跟距离平方成反比的规律只不过是三维欧氏空间的几何性质的必然结论，正如上面我们对流体速度场所做的说明那样，是因为球面积跟半径平方成正比. 电磁现象的 Coulomb 定律也一样.

由上面的说明知道，在 n 维欧氏空间里位势积分的核必须是 $n-1$ 维超球面的面积的倒数关于半径的原函数. 即当 $n>2$ 时，是 $\frac{1}{-(n-2)\sigma_{n-1} r^{n-2}}$，这里 σ_{n-1} 表示 $(n-1)$ 维单位超球面的面积，即 $\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$；当 $n=2$ 时是 $\frac{1}{2\pi}\log_e r$，这时候我们得到对数位势.

§2.2 位势 U_n^μ 和它的连续性

根据§2.1的物理的理由，现在我们给位势一个严格的定义.

假定 μ 是 E^n 上一个 Radon 测度(以后也称质量分布或者简

称测度），那么

$$U_n^{\mu}(P)=\begin{cases}-\int\log_e r_{PQ}\mathrm{d}\mu(e_Q), & n=2,\\ \int r_{PQ}^{2-n}\mathrm{d}\mu(e_Q), & n>2\end{cases}\tag{2.2.1}$$

叫做 μ **相对于 E^n 的位势**. $n>2$ 的时候叫 **Newton 位势**，$n=2$ 的时候叫**对数位势**. 这里自然假定(2.2.1)的等号右边的积分有意义(可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$)，以后凡是提到 U_n^{μ} 都假定是有意义的. 注意：这里积分域 E^n 省去了. 为了简便，U_n^{μ} 也记为 U^{μ}.

假定 μ 和 ν 是两个 Radon 测度，那么

$$(\mu,\nu)_{E^n}=\int U_n^{\mu}\mathrm{d}\nu\tag{2.2.2}$$

叫做 μ 和 ν 相对于 E^n 的**相互能量**，$(\mu,\mu)_{E^n}$ 叫做 μ 相对于 E^n 的**能量**. 当然也只有当(2.2.2)的等号右边的积分有意义的时候，能量或者相互能量才有意义. $(\mu,\nu)_{E^n}$ 也记为 (μ,ν).

相互能量的物理意义是使质量分布 ν 脱离质量分布 μ 所产生的引力场的影响所需要的能量. 按物理的想法，要脱离除非是把负载 ν 的物体无限搬运，特别 (μ,μ) 是使 μ"脱离"自己的引力场所需要的能量，所以实际上是"消灭"μ 的引力场所需要的能量，因此也是产生这个引力场所需要的能量. 按物理的说法，就是一个引力场所蕴藏的能量.

由 Fubini 定理得到

定理 2.2.1(倒反律) 假定 μ 和 ν 是 E^n 上两个 Radon 测度. 如果 $(\mu,\nu)_{E^n}$ 及 $(\nu,\mu)_{E^n}$ 中有一个是有意义的，那么

$$(\mu,\nu)_{E^n}=(\nu,\mu)_{E^n}.$$

证明 首先假定 $n>2$，那么结论等号两边分别等于 $\iint r_{PQ}^{2-n}\mathrm{d}\mu(e_P)\mathrm{d}\nu(e_Q)$ 及 $\iint r_{PQ}^{2-n}\mathrm{d}\nu(e_Q)\mathrm{d}\mu(e_P)$. r_{PQ}^{2-n} 当然关于 $\mu\times\nu$ 可测，因此两边等于(假定有意义的话) $\int r_{PQ}^{2-n}\mathrm{d}(\mu\times\nu)(e_{(P,Q)})$.

$n=2$ 的时候类似. ▌

假定一个函数 $f(P)$（映进 $\hat{\boldsymbol{R}}^1$ 的映射）在拓扑空间里的一点 P_0 的邻域里有意义，而

$$\varliminf_{P\to P_0} f(P) \geqslant f(P_0),$$

那么说 $f(P)$ 在 P_0 **下半连续**，也说 $-f(P)$ 在 P_0 **上半连续**.

引理 1 令 V 是一个拓扑空间里一点 P_0 的邻域. 如果一列函数 $\{f_m(P)\}$ 在 V 里单调增加并且

$$\lim_{m\to\infty} f_m(P) = f(P), \quad P \in V,$$

又设每个 $f_m(P)$ 在 P_0 连续，那么 $f(P)$ 在 P_0 下半连续.

证明 因为对任何正数 ε，存在一个正整数 N，使当 $n>N$ 时，

$$f(P_0) \leqslant f_n(P_0) + \varepsilon = \lim_{P\to P_0} f_n(P) + \varepsilon \leqslant \varliminf_{P\to P_0} f(P) + \varepsilon.$$

ε 是任意的，所以

$$f(P_0) \leqslant \varliminf_{P\to P_0} f(P). \quad \blacksquare$$

定理 2.2.2 令 V 是一点 $P_0 \in \boldsymbol{E}^n$ 的一个邻域. 假定 μ 是 $\boldsymbol{E}^n$ 上的一个 Radon 测度，μ 在 V 的限制 $\mu|V$ 是正测度，那么 U_n^μ 在 P_0 下半连续.

证明 因为 $U^\mu = U^{\mu|V} + U^{\mu|C(V)}$，而 $U^{\mu|C(V)}$ 在 P_0 是连续的（为什么?）. 现在对一个正数 c 定义

$$r_{[PQ]} = \begin{cases} r_{PQ}, & \text{当 } r_{PQ} \geqslant c \text{ 时}, \\ c, & \text{当 } r_{PQ} < c \text{ 时}. \end{cases}$$

那么当 $n>2$ 时，当 c 单调减小趋于 0 的时候，$r_{[PQ]}^{2-n}$ 单调增加并且以 r_{PQ}^{2-n} 为极限. 因此由 Lebesgue 收敛定理，

$$U^{\mu|V}(P) = \lim_{c\to 0} \int r_{[PQ]}^{2-n} \mathrm{d}(\mu|V)(e_Q).$$

等号右边极限号下的积分在 P_0 是连续的（为什么?），所以由引理 1，$U^{\mu|V}$ 在 P_0 下半连续. 当 $n=2$ 时类似. $\blacksquare$

假定 μ 是拓扑空间 X 上的一个 (B) 测度，那么点集 $H=\{P \mid P\in X$，并且对 P 的任何邻域 V，$|\mu|(V)>0\}$ 称为 μ 的**支柱**（或者**基地**）. μ 的支柱当然是闭集.

定理 2.2.3（Evans-Vasilescu） 假定 E^n 上一个分布 μ 的支柱是 S，$U^\mu(P)|S$ 在一点 $P_0 \in S$ 连续，那么 $U^\mu(P)$ 在 P_0 也连续.

证明 假定 $n>2$，用 $K(P_0,R)$ 表示中心在 P_0、半径等于 R 的开超球.

$$U^\mu(P) = \int r_{PQ}^{2-n}\mathrm{d}\mu(e_Q)$$
$$= \int_{K(P_0,R)} r_{PQ}^{2-n}\mathrm{d}\mu(e_Q) + \int_{C(K(P_0,R))} r_{PQ}^{2-n}\mathrm{d}\mu(e_Q), \quad (2.2.3)$$

把最后两个积分的前一个记作 $W_1(P)$，后一个记作 $W_2(P)$，那么 $W_2(P)$ 在 P_0 连续.

由假设，$U^\mu(P_0)$ 有限，也就是 $\int r_{P_0Q}^{2-n}\mathrm{d}\mu(e_Q)$ 存在，所以

$$\lim_{R\to 0}\int_{K(P_0,R)} r_{P_0Q}^{2-n}\mathrm{d}\mu(e_Q) = 0,$$

也就是对任何正数 η，存在一个正数 δ 使

$$|W_1(P_0)| = \left|\int_{K(P_0,R)} r_{P_0Q}^{2-n}\mathrm{d}\mu(e_Q)\right|$$
$$< 2^{-n}\eta, \quad 0 < R \leqslant \delta. \quad (2.2.4)$$

现在固定一个 R 使上面式子成立. 由于 $W_1(P)|S$ 在 P_0 连续，当 $Q' \in S$ 并且跟 P_0 充分接近时，

$$|W_1(Q')| = |W_1(Q')|S| < 2^{-n}\eta.$$

当 P 跟 P_0 充分接近的时候，S 中到 P 的最近的点 Q_0 也跟 P_0 充分接近，所以 $W_1(Q_0)$ 也满足上面这不等式，即

$$|W_1(Q_0)| < 2^{-n}\eta.$$

因此当 P 跟 P_0 充分接近的时候，不难知道

$$|W_1(P)| < 2^{n-2}2^{-n}\eta = 2^{-2}\eta. \quad (2.2.5)$$

此外，$W_2(P)$ 在 P_0 连续，所以当 P 跟 P_0 充分接近的时候，

$$|W_2(P) - W_2(P_0)| < 2^{-1}\eta. \quad (2.2.6)$$

由(2.2.3)，(2.2.4)，(2.2.5)，(2.2.6)知道，当 P 跟 P_0 充分接近时，

$$|U^{\mu}(P)-U^{\mu}(P_0)|\leqslant|W_1(P)-W_1(P_0)|+|W_2(P)-W_2(P_0)|$$
$$<2^{-2}\eta+2^{-n}\eta+2^{-1}\eta<\eta.$$

$n=2$ 的时候也不难证明. ▌

习　　题

1. 严格证明定理 2.2.2.
2. 证明定理 2.2.3 对 $\boldsymbol{E}^2$ 成立.

§2.3　E^n 上的几何和有关的微积分原理

为了在以后的讨论中能够有足够严密的逻辑基础来自由地应用几何和分析的原理，这里先说明一下有关 $\boldsymbol{E}^n$ 的一些基本的几何概念. 当 $n\leqslant 3$ 时，这些概念对读者并不陌生，但是也许还缺乏严格的分析的定义.

n 维欧氏向量空间 $\boldsymbol{V}^n$　读者已经知道实线性空间的定义. 假定 $\boldsymbol{V}^n$ 是一个实线性空间，它的任何两个元素 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 对应一个实数，叫做它们的内积，记为 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ 或$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$. 又 $\boldsymbol{V}^n$ 可以被单价地映上 $\boldsymbol{R}^n$，使当 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的像各是$(u^1,\cdots,u^n)\in\boldsymbol{R}^n$ 和$(v^1,\cdots,v^n)\in\boldsymbol{R}^n$ 的时候，

(1) $a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}$ 对应于$(au^1+bv^1,\cdots,au^n+bv^n)$；

(2) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u^1v^1+\cdots+u^nv^n$，

那么说 $\boldsymbol{V}^n$ 是一个 **n 维欧氏向量空间**.

由(2)知道，对任何 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}^n$，把

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}$$

叫做 $\boldsymbol{v}$ 的长度.

对 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{V}^n$ 和 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}^n$，$\arccos\dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$ 称为 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的**交角**. 特别当交角与 $\pm\pi/2$ 差 2π 的整数倍时 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ **正交**.

假定 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}^n$，对所有正数 c，向量 $c\boldsymbol{v}$ 全体称作 $\boldsymbol{v}$ 的**方向**.

把$(1,0,\cdots,0),(0,1,0,\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,0,1)$在定义中所说的映射下的原像记为$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$，那么$\{\boldsymbol{e}_i\}$是$\boldsymbol{V}^n$的一组基底(因为显然线性独立并且任何$v\in\boldsymbol{V}^n$可以表示成$\sum_{i=1}^{n}v^i\boldsymbol{e}_i$)，两两正交，并且长度都等于1，因此称为一组**标准正交基底**.

由于所说的使(1),(2)成立的映上$\boldsymbol{R}^n$的映射并不唯一，$\boldsymbol{V}^n$的标准正交基底也不是唯一的. 不过容易看到，不同的标准正交基底之间的变换可以表示作正交方阵. $\boldsymbol{V}^n$当然还可以有不是标准正交的基底.

$\boldsymbol{V}^2$和$\boldsymbol{V}^3$的几何性质读者当然已经熟悉. 从上面的基本介绍，可以对一般的$\boldsymbol{V}^n$建立类似的几何概念，这里不再一一说明.

$\boldsymbol{E}^n$里的向量$\overrightarrow{PQ}$ 假定$P\in\boldsymbol{E}^n$，$Q\in\boldsymbol{E}^n$. 设在$\boldsymbol{E}^n$的一个直角坐标下，P和Q的坐标分别是$(x^1,\cdots,x^n)$和$(y^1,\cdots,y^n)$，那么P和Q对应了$\boldsymbol{V}^n$中的一个向量$\sum_{i=1}^{n}(y^i-x^i)\boldsymbol{e}_i$，叫做**从$P$到$Q$的向量**，记为$\overrightarrow{PQ}$，这里$\{\boldsymbol{e}_i\}$是预先随便取定的$\boldsymbol{V}^n$的一组标准正交基底.

注意，在$\boldsymbol{E}^n$的另外直角坐标法下，P和Q的坐标可能不同，但是$\overrightarrow{PQ}$是一样的. 此外，$|\overrightarrow{PQ}|$就是P到Q的距离.

曲线 把一个实数闭区间$[a,b]$映入一个拓扑空间的连续映射f下的像C叫做这空间里的一条**曲线**，或者一段**曲线弧**.

特别，在$\boldsymbol{E}^n$中，选定一个坐标系以后，曲线C就是满足下面方程的点P的全体：

$$x^i=x^i(P)=x^i(f(t))=\varphi^i(t), \qquad (2.3.1)$$

其中$i=1,\cdots,n,a\leqslant t\leqslant b$，这里$x^1,\cdots,x^n$表示点$P$的坐标，点$f(a)$和$f(b)$分别称为$C$的**起点**和**终点**.

当(2.3.1)里$\varphi^i(t)$都是t的一次函数时，C叫**直线段**.

当(2.3.1)里$\varphi^i(t)$在一点$t=t_0\in[a,b]$可微分时，我们把下列"直线"称为曲线C在$(x_0^1,\cdots,x_0^n)$点的**切线**：

$$x^i = x_0^i + \left.\frac{\mathrm{d}\varphi^i}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}(t - t_0), \quad x_0^i = \varphi^i(t_0). \qquad (2.3.2)$$

其中$-\infty<t<+\infty$.

直线段的长度就是它的两个端点的距离. 假定$l_1,\cdots,l_N$是有限个直线段,l_i的终点与l_{i+1}的起点一致,那么曲线$l_1+\cdots+l_N$叫一条折线. 一条折线的长度就是它的各个直线段的长度的和. 一条曲线的长度就是它的所有的内接折线的长度的上确界.

假定由(2.3.1)定义的曲线C有长度(充分而且必要的条件是每个φ^i都有有界变差),那么闭区间$[a,b]$的任何一个闭子区间I在C上的像$e(=f(I))$是有长度的子曲线弧,它的长度记作$s(e)$. 这些子曲线弧全体所繁殖的σ环就是C的子集族(B). s可以扩张到(B)上去,并且加以完备化. 这样一个完备化了的测度叫做C上的 **Lebesgue 测度**,仍旧记为s. s也可以看作$\boldsymbol{E}^n$上的一个(B)测度,只要对$\boldsymbol{E}^n$的任何(B)子集e定义$s(e)=s(e\cap C)$好了. 关于曲线C上的 Lebesgue 测度s的积分叫做**沿曲线 C 的积分**.

特别,当φ^i都是$[a,b]$里(在 Lebesgue 意义下的)绝对连续的函数时,如果把$[a,b]$上的 Lebesgue 测度记作λ,那么

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi^i}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2}.$$

关于λ的积分通常也记作$\int_a^b f\mathrm{d}t$的形式. 于是函数F沿C的积分可以表示为

$$\int_C F\mathrm{d}s = \int_a^b F(P(t))\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi^i}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2}\mathrm{d}t.$$

超曲面　$\boldsymbol{E}^3$的几何所研究的主要点集是曲线和曲面. 上面已经把曲线的概念推广到$\boldsymbol{E}^n$甚至于一般拓扑空间中去. 当$n>3$时,相当于曲面的是超曲面.

如果一个连通的 Hausdorff 空间的每一点都有一个邻域与$\boldsymbol{R}^k$开子集同胚(成拓扑对应),那么这个空间叫做一个 **k 维流形**.

E^n 的 $n-1$ 维子流形 S 叫做 E^n 中的**超曲面**. 由定义知道，S 可以局部地由下面的方程表示：

$$x^i = x^i(P) = x^i(f(u^1,\cdots,u^{n-1})) = \varphi^i(u^1,\cdots,u^{n-1}), \quad (2.3.3)$$

其中 $(u^1,\cdots,u^{n-1}) \in U \subseteq \boldsymbol{R}^{n-1}$, $i=1,\cdots,n$. 这里 $x^1,\cdots,x^n$ 表示 S 的一个相对开集 V 中的变动点 P 的坐标，f 是流形定义中所说的那个局部定义的拓扑映射.

(2.3.3)有时候可以表示成下面的方程：

$$F(x^1,\cdots,x^n) = F(x^1(P),\cdots,x^n(P)) = G(P) = 0, \quad (2.3.3')$$

这里 $G(P)$ 是在 V 的一个邻域里连续的函数. 由隐函数存在定理，(2.3.3)可以表示成(2.3.3′)的一个充分条件是(2.3.3)里的 φ^i 都连续可微分，并且长方阵 $\left(\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial u^j}\right)$ 的秩等于 $n-1$. 反过来，如果函数 $G(P)=F(x^1,\cdots,x^n)$ 在 E^n 的一个开子集里定义，并且关于 $x^1,\cdots,x^n$ 的偏导数连续，且在每一点都不全等于 0，那么点集 $\{P|G(P)=0\}$ 的每点有相对邻域 V 可以用(2.3.3)这种形式的方程表示.

特别，当 E^n 的一个超曲面可以用一次方程 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^i = c$ 表示时，这超曲面叫做 E^n 里的一个超平面，而向量 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i$ 叫做它的**法线向量**. 容易证明超平面内的任何一个向量(就是从超平面上任一点到该超平面上另一点的向量)与法线向量正交. 在这个意义下，我们说超平面与其法线向量正交.

现在假定一个超曲面 S 的方程可以表示成(2.3.3′)，函数 F 在 S 的一个邻域中定义，关于 x^i 的偏导数连续，并且在 S 的任意一点处偏导数不同时为 0，那么对 $P_0 \in S$，把向量 $\boldsymbol{N}_{P_0} = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x^i}\right)_{P_0}\boldsymbol{e}_i$ 叫做 S 在 P_0 的一个法线向量. 由于对任何不等于 0 的实数 c，方程 $F=0$ 与方程 $cF=0$ 是等价的，$c\boldsymbol{N}_{P_0}$ 也是 S 在 P_0 的法线向量. 必要时我们把法线向量分作正负两种，比方规定当 $c>$

0 时，cN_{P_0}是正方向的，而 $c<0$ 时，是负方向的. 也可以反过来规定.

容易看到，S 上通过 P_0 的任何一条有切线的曲线在 P_0 的切线是跟 N_{P_0}正交的. 这些切线的和集是一个超平面 T_{P_0}. T_{P_0}的方程可以写成

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right)_{P_0}(x^i(P)-x^i(P_0))=0.$$

T_{P_0}叫做 S 在 P_0 的**切超平面**.

假定 S 在每一点 $P\in S$ 都有法线向量 N_P，并且 N_P 跟第 i 个"坐标超平面"π_i（即超平面 $x^i=0$）的法线向量不正交，交角是 $\gamma_i(P)$，那么对任何一个(B)集 $e\subseteq S$，可定义

$$\sigma(e)=\int_{e_i}|\sec\gamma_i(P)|\,\mathrm{d}\sigma^i(e_{P_i})$$

$$=\int_{e_i}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right)^2}\Bigg/\left|\frac{\partial F}{\partial x^i}\right|\mathrm{d}\sigma^i(e_{P_i}),$$

这里 P_i 是 P 在 π_i 上的投影，即 $P_i\in\pi_i$ 且除第 i 个坐标以外，P_i 的各个坐标与 P 的相应的坐标相等，e_i 表示 e 在 π_i 上的投影，即 $P\in e$ 的投影 P_i 的全体，σ^i 是把 π_i 当作一个 $\boldsymbol{E}^{n-1}$看的时候 π_i 上的 Lebesgue 测度.

为了把测度 σ 扩张到 $\boldsymbol{E}^n$ 上来，对任何(B)集 $e\subseteq\boldsymbol{E}^n$，我们定义

$$\sigma(e)=\sigma(e\cap S).$$

σ 这个测度叫做 S 上的 **Lebesgue 测度**. 当 $e\subseteq S$ 时，$\sigma(e)$叫做 e 的**超面积**. 关于 σ 的积分称为**超曲面 S 上的积分**.

假定 S 的法线向量跟另外一个坐标超平面 π_j 的法线向量也不正交，那么 σ 也可以通过在 π_j 上的投影定义，结果是一致的. 非但这样，σ 与 $\boldsymbol{E}^n$ 的直角坐标法的选择无关.

假定超曲面 $S=\bigcup S_m$，每个超曲面 S_m 在每点 $P\in S_m$ 的法线向量跟某一个 π_{i_m}的法线向量不正交，那么 S_m 上 Lebesgue 测度 σ_m 就可以像上面那样定义了. S 的任何一个(B)子集 e 可以分作不重

迭的(B)集e_m，$\bigcup e_m=e$，并且$e_m\subseteq S_m$. 于是可以定义S上的Lebesgue 测度σ如下：

$$\sigma(e)=\sum\sigma_m(e_m).$$

由前一段的说明知道σ与e分作e_m的分法无关.

当S是一个超平面的时候，那么S是一个$\boldsymbol{E}^{n-1}$(为什么?)，这时S上的 Lebesgue 测度跟通常$\boldsymbol{E}^{n-1}$上的 Lebesgue 测度一致.

例 1 $\boldsymbol{E}^n$上超球面$S(O,R)$的超面积$\sigma(S(O,R))$的计算.

$S(O,R)$的方程可以写作$\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2=R^2$. 把$S(O,R)$上满足$x^1\geqslant 0$的部分记作$S_+$，那么

$$\sigma(S(O,R))=2\sigma(S_+)=2\int_{S_+}\frac{R}{x^1}\mathrm{d}\sigma^1$$

$$=2\int\cdots\int\frac{R}{\sqrt{R^2-(x^2)^2-\cdots-(x^n)^2}}\mathrm{d}x^2\cdots\mathrm{d}x^n$$

$$=2\int\cdots\int\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{R^2-(x^2)^2-\cdots-(x^{n-2})^2}}\frac{Rr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^2-(x^2)^2-\cdots-(x^{n-2})^2-r^2}}\right]\mathrm{d}x^2\cdots\mathrm{d}x^{n-2}$$

$$=\cdots=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}R^{n-1}.$$

特别，

$$\sigma(S(0,1))=\sigma_{n-1}=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

(超)立体角 假定S是一个超曲面，在每一点$P\in S$有法线向量$\boldsymbol{N}_P$. 又假定$\boldsymbol{N}_P$当作把S映进V^n的一个映射来看是连续的. $P_0\notin S$. 把$\boldsymbol{N}_P$跟$\overrightarrow{P_0P}$的交角记作$\gamma_{P_0}(P)$. 对任何一个(B)集$e\subseteq S$，定义

$$\omega_{P_0}(e)=\int_e r_{P_0P}^{1-n}\cos\gamma_{P_0}(P)\mathrm{d}\sigma(e_P).$$

ω_{P_0}叫做S上关于P_0的**立体角测度**，$\omega_{P_0}(e)$叫做e对P_0的**立体角**. $\cos\gamma_{P_0}(P)$可能是负的，所以$\omega_{P_0}(e)$也可能是负的. 所以$\omega_{P_0}(e)$跟e

的法线向量的正负的规定有关. e 对 P_0 的立体角可以看作沿着到 P_0 的方向在 $S(P_0,1)$ 上的"投影"的超面积的代数和.

$\cos\gamma_{P_0}(P)$ 可以用 r_{P_0P} 的微分表示. 取一点 Q 使 $\overrightarrow{PQ}$ 与 N_P 同方向,那么

$$\lim_{Q\to P}\frac{r_{P_0Q}-r_{P_0P}}{r_{PQ}}=\cos\gamma_{P_0}(P).$$

这是由"余弦公式"可以证明的. 等号左边这个极限通常记作 $\frac{\partial r_{P_0P}}{\partial N_P}$. $\frac{\partial}{\partial N_P}$ 叫做沿 N_P 的方向导数运算. 于是得到

$$\begin{aligned}\omega_{P_0}(e)&=\int_e r_{P_0P}^{1-n}\frac{\partial r_{P_0P}}{\partial N_P}\mathrm{d}\sigma(e_P)\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{2-n}\displaystyle\int_e\frac{\partial r_{P_0P}^{2-n}}{\partial N_P}\mathrm{d}\sigma(e_P), & n>2,\\ \displaystyle\int_e\frac{\partial\log_e r_{P_0P}}{\partial N_P}\mathrm{d}\sigma(e_P), & n=2.\end{cases}\end{aligned}$$

Green 公式 假定 E^n 的一个有界子区域 Ω(一个开球的子区域)的边界 $B(\Omega)$是一个有连续的法线向量的超曲面,每条与某坐标轴平行的直线跟 Ω 的交集是连通的. 又假定 u 在 $\overline{\Omega}$ 里连续,在 Ω 里连续可微分. 令 Ω^1 表示 Ω 在 $x^1=0$ 上的投影,那么由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned}\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x^1}\mathrm{d}\tau&=\iint\frac{\partial u}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}\sigma^1\\&=\int_{\Omega^1}\{u(P_2)-u(P_1)\}\mathrm{d}\sigma^1,\end{aligned}$$

这里 P_1 和 P_2 表示与 x^1 轴平行的直线和 Ω 的交集的两个端点. 选择 $B(\Omega)$ 的法线向量 N_{P_1} 和 N_{P_2} 的方向使 $\cos\gamma_1(P_2)\geqslant 0$ 而 $\cos\gamma_1(P_1)\leqslant 0$, 那么由 $B(\Omega)$上的 Lebesgue 测度 σ 的定义和定理 1.3.2′得到

$$\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x^1}\mathrm{d}\tau=\int_{B(\Omega)}u\cos\gamma_1\mathrm{d}\sigma.$$

同样道理得到

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x^i} \mathrm{d}\tau = \int_{B(\Omega)} u \cos\gamma_i \mathrm{d}\sigma. \qquad (2.3.4)$$

(2.3.4)称作 **Green 公式**或者**分部积分公式**. 根据上面所说的法线的选择,知道这里的正方向是朝外的,也就是说 N_P 是从 P 到 $C(\Omega)$里某一点的向量. 这是因为前面所说的那两点 P_1 和 P_2 是直线段上第一个坐标 x^1 最小及最大的地方. 如果改取内法线方向当正方向,那么(2.3.4)中等号的右边要加一个负号.

要使 Green 公式成立,对区域 Ω 的要求可以放宽. 显然只要假定 Ω 是 E^n 的子区域,$\overline{\Omega} = \bigcup_{m=1}^{k} \overline{\Omega}_m$,当 $m \neq l$ 时 $\Omega_m \cap \Omega_l = \varnothing$,每个 Ω_m 满足前面所说的条件,即每条平行于坐标轴的直线跟 Ω_m 的交集是连通的,并且在这种交集的端点 $B(\Omega_m)$ 有连续的法线向量.

要求还可以更宽,不过不必再考虑,在本书里用不到那样的结果.

§2.4 E^n 的子区域里的调和函数

假定一个函数 u 在一点 $P \in E^n$ 的一个邻域里定义,二次连续可微分,并且满足方程

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial (x^i)^2} = 0, \qquad (2.4.1)$$

那么说 u 在 P 调和. 假定 u 在一个点集里点点调和,那么说 u 在这个点集里**调和**.

(2.4.1)里的算子 Δ 叫 **Laplace 算子**,(2.4.1)叫 **Laplace 方程**.

给定一点 $Q \in E^n$. 由定义知道,当 $P \neq Q$ 时,r_{PQ}^{2-n} 和$\log_e r_{PQ}$ 作为 P 的函数分别在 E^n 和 E^2 中调和. 因此,位势 U_n^μ 必然有某种近乎调和的性质. 事实上,我们以后还会看到位势论是从调和函数的

研究中发展起来的. 这里先说明有关调和函数的一些基本事实.

为方便起见,采用下面的记号

$$\nabla = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

对一个一次连续可微分的函数 $v(P)=v(x^1,\cdots,x^n)$,定义

$$\nabla v(P) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i \frac{\partial v}{\partial x^i},$$

就是说 ∇v 是一个向量场,叫做 v 的**梯度**.

又假定 $\boldsymbol{v}$ 是一个连续可微分的向量场,即 $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i v^i$,$v^i$ 连续可微分,那么定义

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v^i}{\partial x^i}$$

叫做 $\boldsymbol{v}$ 的**散度**.

因此,对一个二次连续可微分的函数 f,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2} = \nabla \cdot \nabla f.$$

假定 Ω 是上节末了所说的那样的区域, u 和 $\boldsymbol{v} = \sum \boldsymbol{e}_i v^i$ 分别是在 $\bar{\Omega}$ 里连续而在 Ω 里连续可微分的函数及向量场,那么由 Green 公式知道

$$\begin{aligned}\int_\Omega u \nabla \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}\tau &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial (u v^i)}{\partial x^i} - v^i \frac{\partial u}{\partial x^i} \right\} \mathrm{d}\tau \\ &= - \sum_{i=1}^{n} \int_{B(\Omega)} u v^i \cos\gamma_i \mathrm{d}\sigma - \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial u}{\partial x^i} \mathrm{d}\tau. \quad (2.4.2)\end{aligned}$$

这里把内法线单位向量的第 i 个分量记为 $\cos\gamma_i$. 假定把 $\boldsymbol{v}$ 在 $B(\Omega)$ 的内法线方向 $a\boldsymbol{N}(a>0)$ 的"投影"记为 v_N,那么

$$v_N = \boldsymbol{v} \cdot \frac{\boldsymbol{N}}{|\boldsymbol{N}|} = \sum_{i=1}^{n} v^i \cos\gamma_i.$$

因此,(2.4.2)可以写作

$$\int_\Omega u \nabla \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}\tau = - \int_{B(\Omega)} u v_N \mathrm{d}\sigma - \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \nabla u \mathrm{d}\tau. \quad (2.4.2')$$

特别，假定 f 是一个在 $\overline{\Omega}$ 的一个邻域里连续可微分而在 Ω 里二次连续可微分的函数，$\boldsymbol{v}=\nabla f$，那么(2.4.2′)变作

$$\int_{\Omega} u\Delta f \mathrm{d}\tau = -\int_{B(\Omega)} u \frac{\partial f}{\partial N}\mathrm{d}\sigma - \int_{\Omega}\nabla f\cdot\nabla u\mathrm{d}\tau. \qquad (2.4.3)$$

等号右边第二个积分叫做 f 和 u 的 **Dirichlet 积分**. 当 u 也是在 $\overline{\Omega}$ 的一个邻域里连续可微分且在 Ω 里二次连续可微分时，那么由(2.4.3)得到

$$\int_{\Omega}(u\Delta f - f\Delta u)\mathrm{d}\tau = -\int_{B(\Omega)}\left(u\frac{\partial f}{\partial N} - f\frac{\partial u}{\partial N}\right)\mathrm{d}\sigma, \qquad (2.4.4)$$

这里 N 是 $B(\Omega)$的内法线向量. (2.4.2)，(2.4.2′)，(2.4.3)，(2.4.4)都叫 **Green 公式**.

应用(2.4.4)可以得到调和函数的一些重要性质.

定理 2.4.1 假定 E^n 的子区域 Ω 满足§2.3末的条件，u 在 $\overline{\Omega}$ 里调和，那么

$$\int_{B(\Omega)}\frac{\partial u}{\partial N}\mathrm{d}\sigma = 0. \qquad (2.4.5)$$

证明 在(2.4.4)里令 $f\equiv 1$ 即得到(2.4.5). ▌

假定函数 u 关于 $S(P_0,r)$上的 Lebesgue 测度 σ 可积分，那么我们把

$$\int u\mathrm{d}\epsilon_{P_0,r} = \frac{1}{\sigma_{n-1}r^{n-1}}\int_{S(P_0,r)}u\mathrm{d}\sigma$$

叫做 u 在 $S(P_0,r)$上的**平均值**，这里测度

$$\epsilon_{P_0,r} = \frac{1}{\sigma_{n-1}r^{n-1}}\sigma$$

叫做单位质量在 $S(P_0,r)$上的**均匀分布**.

推论 1 假定 $u(P)$在区域 $\{P\,|\,0\leqslant R'<r_{P_0P}<R''\leqslant+\infty\}$ 里调和，那么

$$\int u\mathrm{d}\epsilon_{P_0,r} = \begin{cases}\dfrac{a}{(2-n)\sigma_{n-1}}r^{2-n}+b, & n>2,\\[2mm] \dfrac{a}{2\pi}\log_e r + b, & n=2,\end{cases} \qquad (2.4.6)$$

其中 b 为常数.

证明 取 Ω 为"球壳",即 $\Omega=\{P \mid R'<r_1<r_{P_0P}<r_2<R''\}$,那么由(2.4.5)得到

$$\int_{S(P_0,r_1)} \frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}\sigma = \int_{S(P_0,r_2)} \frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}\sigma.$$

这表示

$$\int_{S(P_0,r)} \frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}\sigma = a, \quad R'<r<R'',$$

这里 a 是一个常数. 由于

$$\varepsilon_{P_0,t} = \frac{\sigma}{\sigma_{n-1}t^{n-1}},$$

得到

$$a = \int_{S(P_0,t)} \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}\sigma = \sigma_{n-1}t^{n-1}\int \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}\varepsilon_{P_0,t}$$

$$= \sigma_{n-1}t^{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P_0,t},$$

其中略去的积分域是 E^n. 移项并积分,就得到(2.4.6). ▎

推论 2 假定 u 在 $\overline{K(P_0,r)}$ 里调和,那么

$$\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P_0,r} = u(P_0). \qquad (2.4.7)$$

证明 由于 u 在 $\overline{K(P_0,r)}$ 里有界, $\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P_0,r}$ 当 $r\to 0$ 时有界. 由(2.4.6)知道常数 $a=0$,因此

$$\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P_0,r} = b. \qquad (2.4.8)$$

另外一方面,对任何一个正数 ε,只要取 r 充分小,可使

$$|u(P)-u(P_0)|<\varepsilon, \quad P\in S(P_0,r).$$

因此

$$\left|\int[u(P)-u(P_0)]\mathrm{d}\varepsilon_{P_0,r}(e_P)\right| = \left|\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P_0,r} - u(P_0)\right| < \varepsilon.$$

ε 是任意的,所以

$$u(P_0)=\lim_{r\to 0}\int u\,\mathrm{d}\varepsilon_{P_0,r}=b. \tag{2.4.9}$$

比较(2.4.8)和(2.4.9)得到(2.4.7). ∎

开球的 Green 函数 考虑一个开球 $K(P_0,R)$，从球心 P_0 出发作射线通过一点 Q. 假定这射线上一点 $\tilde{Q}$ 满足

$$r_{P_0Q}r_{P_0\tilde{Q}}=R^2,$$

就说 $\tilde{Q}$ 和 Q 关于 $S(P_0,R)$ 或者关于 $K(P_0,R)$ 对称. 对于任何 $P\in S(P_0,R)$，由于三角形 $\triangle P_0\tilde{Q}P$ 和 $\triangle PP_0Q$ 相似，可得到

$$r_{QP}=\frac{R}{r_{P_0\tilde{Q}}}r_{\tilde{Q}P}=\frac{r_{P_0Q}}{R}r_{\tilde{Q}P},\quad P\in S(P_0,R).$$

现在当 $(P,Q)\in K(P_0,R)\times K(P_0,R)$ 时，令

$$G(P,Q)=\begin{cases} r_{PQ}^{2-n}-\left(\dfrac{r_{P_0Q}}{R}\right)^{2-n}r_{\tilde{Q}P}^{2-n} \\ \qquad =U_n^{\varepsilon_Q}(P)-U_n^{\varepsilon_{\tilde{Q}}}(P)\left(\dfrac{r_{P_0Q}}{R}\right)^{2-n}, & n>2, \\ \log_e\dfrac{1}{r_{PQ}}-\log_e\dfrac{1}{r_{P\tilde{Q}}}-\log_e\dfrac{R}{r_{P_0Q}} \\ \qquad =U_2^{\varepsilon_Q}(P)-U_2^{\varepsilon_{\tilde{Q}}}(P)-\log_e\dfrac{R}{r_{P_0Q}}, & n=2. \end{cases}$$

$G(P,Q)$ 就叫做 $K(P_0,R)$ 里的 **Green 函数**. 它有下列性质：

(1) 当 P 趋近于任何一点 $P'\in S(P_0,R)$ 时，$G(P,Q)\to 0$.

(2) $G(P,Q)=\begin{cases} r_{PQ}^{2-n}+H(P,Q), & n>2, \\ -\log_e r_{PQ}+H(P,Q), & n=2, \end{cases}$

这里 $H(P,Q)$ 关于 $P\in K(P_0,R)$ 调和.

当 $(P,Q)\in K(P_0,R)\times K(P_0,R)$ 时，$\triangle P_0P\tilde{Q}$ 和 $\triangle P_0Q\tilde{P}$ 相似，因此，$r_{P_0Q}r_{\tilde{Q}P}=r_{P_0P}r_{\tilde{P}Q}$. 所以得到

(3) 当 $(P,Q)\in K(P_0,R)\times K(P_0,R)$ 时，

$$G(P,Q)=G(Q,P).$$

此外，还可以看到

(4) $G(P,Q)$可以调和延拓到$\overline{K(P_0,R)}\setminus\{Q\}$的一个邻域里去.

利用 Green 函数和 Green 公式(2.4.4)可以得到

定理 2.4.2 假定 u 在$\overline{K(P_0,R)}$里调和,那么

$$u(Q)=\frac{1}{c_n}\int_{S(P_0,R)}u(P)\frac{\partial G(P,Q)}{\partial N_P}\mathrm{d}\sigma(e_P),\quad (2.4.10)$$

这里 N_P 表示 $S(P_0,R)$在 P 的内法线向量,c_n 由下式给出:

$$c_n=\begin{cases}(n-2)\sigma_{n-1}, & n>2,\\ 2\pi, & n=2.\end{cases}$$

证明 取 δ 充分小使 $K(Q,\delta)\subseteq K(P_0,R)$,再令 $\Omega=K(P_0,R)\setminus\overline{K(Q,\delta)}$. 在(2.4.4)里取 $f(P)=G(P,Q)$,那么

$$\begin{aligned}0=&-\int_{S(P_0,R)}u(P)\frac{\partial G(P,Q)}{\partial N_P}\mathrm{d}\sigma(e_P)\\&-\int_{S(Q,\delta)}u(P)\frac{\partial G(P,Q)}{\partial N_P}\mathrm{d}\sigma(e_P)\\&+\int_{S(Q,\delta)}G(P,Q)\frac{\partial u(P)}{\partial N_P}\mathrm{d}\sigma(e_P).\end{aligned}$$

等号右边第三项是 $O(\delta^{2-n}\delta^{n-1})=O(\delta)$,第二项等于

$$\begin{aligned}&-\int_{S(Q,\delta)}u(P)\frac{\partial U_n^{(Q)}(P)}{\partial N_P}\mathrm{d}\sigma(e_P)+O(\delta^{n-1})\\&=\begin{cases}(n-2)\sigma_{n-1}u(Q)+o(1), & n>2,\\ 2\pi u(Q)+o(1), & n=2,\end{cases}\end{aligned}$$

$\delta\to 0$. 因此得到(2.4.10). ▌

另一方面,又可以得到

定理 2.4.3(开球上 Dirichlet 问题的解) 假定 f 在球面 $S(P_0,R)$上连续,那么

$$u(Q)=\frac{1}{c_n}\int_{S(P_0,R)}f(P)\frac{\partial G(P,Q)}{\partial N_P}\mathrm{d}\sigma(e_P)$$

关于 $Q\in K(P_0,R)$调和,并且可以用 $f(P)$连续延拓到 $S(P_0,R)$上去.

证明 由于 $\dfrac{\partial G(P,Q)}{\partial N_P}$ 关于 $Q\in K(P_0,R)$ 调和，利用微分运算和积分的可交换性，就知道 u 调和.

当 $K(P_0,R)\ni Q\to Q_0\in S(P_0,R)$ 的时候，$\tilde{Q}\to Q_0$. 现在取 $S(P_0,R)$ 的一个相对开集 $e\ni Q_0$. 假设 $n>2$，那么

$$\int_{S(P_0,R)\setminus e} f(P)\,\frac{\partial r_{PQ}^{2-n}}{\partial N_P}\mathrm{d}\sigma(e_P)=(2-n)\int_{S(P_0,R)\setminus e} f(P)\mathrm{d}\omega_Q(e_P)$$

$$\to(2-n)\int_{S(P_0,R)\setminus e} f(P)\mathrm{d}\omega_{Q_0}(e_P),\quad Q\to Q_0.$$

同时，

$$\frac{1}{2-n}\int_{S(P_0,R)\setminus e} f(P)\,\frac{\partial}{\partial N_P}\left[\left(\frac{r_{P_0Q}}{R}\right)^{2-n} r_{\tilde{Q}P}^{2-n}\right]\mathrm{d}\sigma(e_P)$$

$$=\int_{S(P_0,R)\setminus e} f(P)\left(\frac{r_{P_0Q}}{R}\right)^{2-n}\mathrm{d}\omega_{\tilde{Q}}(e_P)$$

$$\to\int_{S(P_0,R)\setminus e} f(P)\mathrm{d}\omega_{Q_0}(e_P),\quad Q\to Q_0.$$

因此得到

$$\int_{S(P_0,R)\setminus e} f(P)\,\frac{\partial G(P,Q)}{\partial N_P}\mathrm{d}\sigma(e_P)\to 0,\ Q\to Q_0. \tag{2.4.11}$$

另外一方面，

$$\frac{1}{2-n}\int_e f(P)\,\frac{\partial G(P,Q)}{\partial N_P}\mathrm{d}\sigma(e_P)$$

$$=\int_e f\mathrm{d}\omega_Q(e_P)-\int_e f(P)\left(\frac{r_{P_0Q}}{R}\right)^{2-n}\mathrm{d}\omega_{\tilde{Q}}(e_P).$$

注意，ω_Q 及 $-\omega_{\tilde{Q}}$ 都是正测度，并且当 $Q\to Q_0$ 时，$\omega_Q(e)-\omega_{\tilde{Q}}(e)\to(n-2)\sigma_{n-1}$，而且 $\left(\dfrac{r_{P_0Q}}{R}\right)^{2-n}\to 1$. 因此

$$(n-2)\sigma_{n-1}\inf_{P\in e} f(P)\leqslant\varliminf_{Q\to Q_0}\int_e f(P)\,\frac{\partial G(P,Q)}{\partial N_P}\mathrm{d}\sigma(e_P)$$

$$\leqslant \overline{\lim_{Q\to Q_0}}\int_e f(P)\frac{\partial G(P,Q)}{\partial N_P}\mathrm{d}\sigma(e_P)\leqslant (n-2)\sigma_{n-1}\sup_{P\in e}f(P).$$

(2.4.12)

这里 e 可以取得任意小，由于 $f(P)$ 在 Q_0 连续，上面式子左右两个极端的项都可以任意地接近于 $(n-2)\sigma_{n-1}f(Q_0)$.

因此，由(2.4.11)及(2.4.12)得到

$$\lim_{K(P_0,R)\ni Q\to Q_0}\frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}}\int_{S(P_0,R)}f(P)\frac{\partial G(P,Q)}{\partial N_P}\mathrm{d}\sigma(e_P)=f(Q_0).$$

$n=2$ 的情况是类似的. ▌

习　题

1. 假定 $u(P)$ 在区域 $\{P\,|\,0<r_{P_0P}<R\}$ 里调和，

$$u(P)=\begin{cases}O\left(r_{P_0P}^{2-n}\right), & n>2,\\ O(\log_e r_{P_0P}), & n=2,\end{cases}$$

那么 u 可以(连续)延拓到 P_0 去.

§2.5 位势的上调和性

§2.3 和 §2.4 两节对 E^n 的几何性质和 E^n 里的调和函数的性质作了一个基本的介绍. 现在再回来讨论位势的性质.

假定一个函数 $f(P)$ 在一点 $P_0\in E^n$ 的一个邻域 V 里定义，有下列性质：

(1) $-\infty<f(P)\leqslant+\infty$，并且 $f(P)$ 在 P_0 的充分小的邻域 V_1 里不恒等于 $+\infty$；

(2) $f(P)$ 在 P_0 下半连续；

(3) 存在一个正数 δ，使

$$\int f\mathrm{d}\varepsilon_{P_0,r}\leqslant f(P_0),\quad 0<r<\delta,$$

那么说 f 在 P_0 **上调和**，$-f$ 在 P_0 **下调和**.

为了说明位势与上调和函数的关系，先计算 $\varepsilon_{P_0,r}$ 这个特殊测度的位势.

当 $n>2$ 的时候，把 Q 关于 $S(P_0,r)$ 的对称点记作 $\tilde{Q}$，则

$$U_n^{\varepsilon_{P_0,r}}(P)=\int r_{PQ}^{2-n}\mathrm{d}\varepsilon_{P_0,r}(e_Q)$$

$$=\int\left(\frac{r_{P_0P}}{r}r_{\tilde{P}Q}\right)^{2-n}\mathrm{d}\varepsilon_{P_0,r}(e_Q).$$

如果 $P\in K(P_0,r)$，$\tilde{P}\in C(\overline{K(P_0,r)})$. 因此，$r_{\tilde{P}Q}^{2-n}$ 关于 Q 在 $\overline{K(P_0,r)}$ 里调和. 由定理 2.4.1 推论 2 得到

$$U_n^{\varepsilon_{P_0,r}}(P)=\left(\frac{r_{P_0P}}{r}\right)^{2-n}r_{\tilde{P}P_0}^{2-n}=r^{2-n},\quad P\in K(P_0,r).$$

如果 $P\in C(\overline{K(P_0,r)})$，那么 r_{PQ}^{2-n} 关于 $Q\in\overline{K(P_0,r)}$ 调和，因此，由定理 2.4.1 推论 2 得到

$$U_n^{\varepsilon_{P_0,r}}(P)=r_{PP_0}^{2-n}=U_n^{\varepsilon_{P_0}}(P),\quad P\in C(\overline{K(P_0,r)}).$$

再如果 $P\in S(P_0,r)$（见图 2），那么

图 2

$$U_n^{\varepsilon_{P_0,r}}(P)=\int r_{PQ}^{2-n}\mathrm{d}\varepsilon_{P_0,r}(e_Q)=\frac{1}{\sigma_{n-1}r^{n-1}}\int_{S(P_0,r)}r_{PQ}^{2-n}\mathrm{d}\sigma(e_Q)$$

$$=\frac{1}{\sigma_{n-1}r^{n-1}}\int_{S(P_0,r)}r_{PQ}^{1-n}2r\cos\gamma\mathrm{d}\sigma(e_Q)$$

$$= \frac{2}{\sigma_{n-1} r^{n-2}} \int_{S(P_0,r)} r_{PQ}^{1-n} \frac{\partial r_{PQ}}{\partial N_Q} \mathrm{d}\sigma(e_Q)$$

$$= \frac{2}{(2-n)\sigma_{n-1} r^{n-2}} \int_{S(P_0,r)} \frac{\partial r_{PQ}^{2-n}}{\partial N_Q} \mathrm{d}\sigma(e_Q)$$

$$= \frac{2}{(2-n)\sigma_{n-1} r^{n-2}} \lim_{\delta\to 0} \int_{S(P_0,r)\setminus K(P,\delta)} \frac{\partial r_{PQ}^{2-n}}{\partial N_Q} \mathrm{d}\sigma(e_Q),$$

这里 γ 表示 $\overrightarrow{PQ}$ 和 $\overrightarrow{P_0Q}$ 的交角，N_Q 跟 $\overrightarrow{P_0Q}$ 方向相同. 现在 r_{PQ}^{2-n} 当 $Q \in \overline{S(P_0,r)\setminus K(P,\delta)}$ 时是调和的，所以由定理 2.4.1 得到

$$\int_{S(P_0,r)\setminus K(P,\delta)} \frac{\partial r_{PQ}^{2-n}}{\partial N_Q} \mathrm{d}\sigma(e_Q) = \int_{S(P,\delta)\cap K(P_0,r)} \frac{\partial r_{PQ}^{2-n}}{\partial N_Q} \mathrm{d}\sigma(e_Q)$$

$$= (2-n) \int_{S(P,\delta)\cap K(P_0,r)} \mathrm{d}\omega_P(e_Q)$$

$$= (2-n)\omega_P(S(P,\delta) \cap K(P_0,r))$$

$$\to \frac{2-n}{2}\sigma_{n-1}, \quad \delta \to 0.$$

因此得到

$$U_n^{\epsilon_{P_0,r}}(P) = r^{2-n}, \ P \in S(P_0,r).$$

$n=2$ 的时候可以类似地计算.

总结起来，

$$U_n^{\epsilon_{P_0,r}}(P) = \begin{cases} U_n^{\epsilon_{P_0}}(P), & \text{当 } P \notin \overline{K(P_0,r)}, \\ r^{2-n}, & \text{当 } P \in \overline{K(P_0,r)} \text{ 且 } n>2, \\ -\log_e r, & \text{当 } P \in \overline{K(P_0,r)} \text{ 且 } n=2. \end{cases} \tag{2.5.1}$$

$\epsilon_{P_0,r}$ 是我们时常用来研究一般测度的位势的工具，其位势的这种简单表示形式(2.5.1)使它在一般的测度中显得特殊. 我们在讨论位势的连续性时利用过 $r_{[PQ]}^{2-n}$ $(n>2)$ 或者 $\log_e r_{[PQ]}$ 这样的函数，这实际上就是 $U_n^{\epsilon_{P,a}}(Q)$，因此我们实际上是利用

$$U_n^{\mu}(P) = (\epsilon_P, \mu) = \lim_{a\to 0}(\epsilon_{P,a}, \mu)$$

来证明 U_n^μ 是上半连续或下半连续的. 现在我们再一次利用这种测度来证明 U_n^μ 的上调和及下调和的性质.

定理 2.5.1 假定 E^n 上的 Radon 测度 μ 在一点 $P_0\in E^n$ 的一个邻域 V 上的限制 $\mu|V\geqslant 0$, 又 U_n^μ 在 V 里不恒等于 $+\infty$ 且大于 $-\infty$, 那么 U_n^μ 在 P_0 上调和, $U_n^{-\mu}$ 在 P_0 下调和.

证明 由定理 2.2.2, U_n^μ 在 P_0 下半连续. 现在由定理 2.2.1 和 (2.5.1) 知道

$$
\begin{aligned}
U_n^\mu(P_0)-\int U_n^\mu \mathrm{d}\varepsilon_{P_0,r} &= (\mu,\ \varepsilon_{P_0}-\varepsilon_{P_0,r})_{E^n} \\
&= (\varepsilon_{P_0}-\varepsilon_{P_0,r},\ \mu)_{E^n} \\
&= \begin{cases} -\displaystyle\int_{K(P_0,r)}\left(r^{2-n}-r_{P_0Q}^{2-n}\right)\mathrm{d}\mu(e_Q), & n>2, \\ -\displaystyle\int_{K(P_0,r)}\left(\log_e\frac{1}{r}-\log_e\frac{1}{r_{P_0Q}}\right)\mathrm{d}\mu(e_Q), & n=2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

取 r 充分小可以使 $K(P_0,r)\subseteq V$, 因此 $\mu|K(P_0,r)\geqslant 0$. 于是由上面的等式得到

$$U_n^\mu(P_0)\geqslant\int U_n^\mu \mathrm{d}\varepsilon_{P_0,r}. \quad \blacksquare$$

定理 2.5.2(极小值原理) 在一个区域中非常数的上调和函数在这区域中没有极小值.

证明 假定 $u(P)$ 在一个区域 Ω 中上调和, 有极小值 m, 而且 $u(P_0)=m$. 由上调和的定义, 当 R 充分小的时候,

$$\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P_0,R}\leqslant u(P_0). \tag{2.5.2}$$

现在 u 在 $S(P_0,R)$ 上不可能小于 $u(P_0)$, 所以由 (2.5.2), u 也不可能在 $S(P_0,R)$ 的一个球面测度大于 0 的点集上大于 $u(P_0)$, 因此在 $S(P_0,R)$ 上几乎处处(在球面测度下)等于 m. R 可以取任意小的正数, 所以 u 在 P_0 的一个邻域中几乎处处(在 E^n 的 Lebesgue 测度下)等于 m. 可是 u 是下半连续的, 因此 u 在 P_0 的一个邻域中处处等于 m. 现在令

$$U = \{P \mid u(P) = m, P \in \Omega\},$$

那么 U 是 Ω 的开子集，因为上面证明了如果一点 $P_0 \in U$，那么 P_0 有一个邻域在 U 中.

U 在 Ω 中没有边界集. 事实上如果 U 有边界点 $b \in \Omega$，那么

$$u(b) \leqslant \varliminf_{P \to b} u(P) \leqslant \lim_{U \ni P \to b} u(P) = m.$$

m 是极小值，所以只能是 $u(b) = m$. 这说明 $b \in U$. 可是 U 是开集，U 的边界点不能属于 U. 因此得到矛盾.

这样说来，$\Omega = U \cup (\Omega \setminus \overline{U})$. U 和 $(\Omega \setminus \overline{U})$ 不相交，并且都是开集，而 Ω 是区域，所以 U 和 $(\Omega \setminus \overline{U})$ 一定有一个是空的. U 不空，所以 $(\Omega \setminus \overline{U})$ 空，也就是 $\Omega = U$. 所以 Ω 里每点 P 使 $u(P) = m$. ▌

定理 2.5.3 一个实函数 u 在一个开集 Ω 里调和的充分而且必要的条件是 u 连续，并且对每一点 $P \in \Omega$，当正数 R 充分小的时候，

$$\int u \mathrm{d}\varepsilon_{P,R} = u(P).$$

证明 充分性 假设条件成立. 固定一点 P，取一个充分小的正数 R，根据开超球的 Dirichlet 原理，由于 u 连续，可以用 u 在 $S(P,R)$ 上的数值当边界值，作一个在开超球 $K(P,R)$ 里的调和函数 v. 注意 u 是上调和兼下调和的，所以 $u - v$ 在 $K(P,R)$ 里上调和兼下调和，所以取不到极小值和极大值. 另外一方面，$u - v$ 在有界闭集 $\overline{K(P,R)}$ 里连续，一定有极小值和极大值. 所以 $u - v$ 在超球面 $S(P,R)$ 上取到极小值和极大值. 现在 $u - v$ 在 $S(P,R)$ 上处处等于 0，所以 $u - v$ 恒等于 0，即 $u \equiv v$. 所以 u 在 $K(P,R)$ 中调和，特别是 u 在 P 调和. 但 P 是任意取的，所以 u 在 Ω 中任何一点都调和. ▌

由于一个测度在它的支柱的余集里是零测度，因此，由定理 2.5.1 知道 U_n^μ 在 μ 的支柱的余集里是调和的. 不但这样，还可以证明：如果 U_n^μ 在一点 P 调和，那么 P 属于 μ 的支柱的余集. 为了证明这个事实，先证明下面的引理 1. 为说明方便，符合 §2.3 末了

的条件的区域称为**简单区域**.

引理 1 假定 D 是 E^n 的一个开子集，$\overline{D}\subseteq K(P_0,R)$，而 $K(P_0,R)\setminus\overline{D}$ 是一个简单区域. 又假定位势 U_n^μ 在 $\overline{K(P_0,R)\setminus D}$ 里调和，那么

$$\mu(\overline{D})=-\frac{1}{c_n}\int_{B(D)}\frac{\partial U_n^\mu}{\partial N}\mathrm{d}\sigma, \qquad (2.5.3)$$

其中

$$c_n=\begin{cases}(n-2)\sigma_{n-1}, & n>2,\\ 2\pi, & n=2,\end{cases}$$

这里 N 表示 $B(D)$ 的外法线向量.

证明 把定理 2.4.1 应用到区域 $K(P_0,R)\setminus\overline{D}$ 可得到

$$\int_{S(P_0,R)}\frac{\partial U_n^\mu}{\partial N}\mathrm{d}\sigma-\int_{B(D)}\frac{\partial U_n^\mu}{\partial N}\mathrm{d}\sigma=0,$$

这里两个积分中的 N 分别表示 $S(P_0,R)$ 及 $B(D)$ 的外法线（分别朝向 $K(P_0,R)$ 及 D 的外部）. 假定 $n>2$，那么由定理 2.2.1 及(2.5.1)，得

$$\begin{aligned}\int_{S(P_0,R)}\frac{\partial U_n^\mu}{\partial N}\mathrm{d}\sigma&=R^{n-1}\sigma_{n-1}\int\frac{\partial U_n^\mu}{\partial N}\mathrm{d}\varepsilon_{P_0,R}\\&=R^{n-1}\sigma_{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\int U_n^\mu\mathrm{d}\varepsilon_{P_0,R}\\&=R^{n-1}\sigma_{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\int U_n^{\varepsilon_{P_0,R}}\mathrm{d}\mu\\&=R^{n-1}\sigma_{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}(R^{2-n}\mu(\overline{D}))\\&=(2-n)\sigma_{n-1}\mu(\overline{D}).\end{aligned}$$

因此，(2.5.3)成立. $n=2$ 的情形也类似. ▌

由引理 1 可以证明

定理 2.5.4 位势 U_n^μ 在一点 P_0 调和的充分而且必要的条件是 P_0 不属于 μ 的支柱.

证明 充分性由定理 2.5.3 已经看到了，只证明条件的必要

性.

假定 U_n^μ 在 P_0 调和，那么在一个闭球$\overline{K(P_0,R)}$里调和. 随便取 $K(P_0,R)$的一个紧致子集 e.

假定 $\mu_+(e)>0$，那么存在一个(B)集 $e_1\subseteq e$ 使 $\mu(e_1)=\mu_-(e)$. 因此存在一个闭集 $e_1'\subseteq e_1$，使

$$|\mu|(e_1') = \mu(e_1') > \mu(e_1)/2 = \mu_+(e)/2.$$

又可以取一个开集 $D\supseteq e_1'$，使

$$|\mu|(\overline{D}\setminus e_1') < \mu(e_1)/4 = \mu_+(e)/4.$$

由于 e_1' 紧致，不妨取 D 作为有限个充分小的开球的和集，使 $\overline{D}\subseteq K(P_0,R)$. 因此 $K(P_0,R)\setminus\overline{D}$ 是一个简单区域. 于是由引理 1，

$$\int_{B(D)} \frac{\partial U_n^\mu}{\partial N}\mathrm{d}\sigma = -c_n\mu(\overline{D}).$$

另外一方面，由定理 2.4.1 知道

$$\int_{B(D)} \frac{\partial U_n^\mu}{\partial N}\mathrm{d}\sigma = 0.$$

所以得到

$$\begin{aligned}0 = \mu(\overline{D}) &\geqslant \mu(e_1') - |\mu|(\overline{D}\setminus e_1')\\ &> \mu(e_1)/2 - \mu(e_1)/4 = \mu_+(e)/4 \geqslant 0.\end{aligned}$$

因此，$\mu_+(e)=0$，这跟假设矛盾，所以 $\mu_+(e)>0$ 不可能.

同样，$\mu_-(e)>0$ 也不可能.

因此，$|\mu|$ 在 $K(P_0,R)$的任何闭子集 e 里分布的质量等于 0. 于是$|\mu|(K(P_0,R))=0$. 因此 P_0 不属于 μ 的支柱. ▌

由定理 2.5.4 可以得到下面唯一性定理.

定理 2.5.5 假定对每一点 $P\in \boldsymbol{E}^n$，存在一列球面 $S(P,r_m)$，$r_m\to 0$，使

$$U_n^\mu(Q) = 0,\quad Q\in S(P,r_m)\quad (m=1,2,\cdots),\ P\in \boldsymbol{E}^n,$$

那么 μ 是零测度.

证明 对每一点 P，由倒反律(定理 2.2.1)，

$$U_n^\mu(P) = \lim_{m\to\infty}\int U_n^{\epsilon_{P,r_m}}\mathrm{d}\mu$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int U_n^{\mu}(Q)\mathrm{d}\epsilon_{P,r_m}(e_Q)$$

$$= \lim_{m\to\infty} 0 = 0.$$

因此,U_n^{μ} 恒等于0.由定理2.5.4,$\boldsymbol{E}^n$ 的每一点不属于 μ 的支柱.因此,μ 的支柱是空的. ▌

习　题

1. 证明:假定 u 在 P_0 上调和,那么 $\varliminf_{P\to P_0} u(P) = u(P_0)$.

2. 假定 $O\in \boldsymbol{E}^n$,

(1) 证明 $\boldsymbol{E}^n\setminus\{O\}$ 是 $S(0,1)$ 及区间 $(0,\infty)$ 的拓扑乘积;

(2) 把 $\boldsymbol{E}^n$ 上的 Lebesgue 测度记作 τ^n,证明:

$$\mathrm{d}\tau^n|(\boldsymbol{E}^n\setminus\{O\}) = \sigma_{n-1} R \mathrm{d}\varepsilon_{O,R} \times \tau^1|(0,\infty);$$

(3) 计算 $U_n^{\tau^n}(P)$ 及 $U_n^{\tau^n|K(O,R)}(P)$.

3. 证明:假定 $a_1,\cdots,a_n$ 都是正数,$u_1,\cdots,u_n$ 都是上(下)调和,那么 $a_1u_1+\cdots+a_nu_n$ 也都上(下)调和.

4. 证明:假定 $u_1,\cdots,u_n$ 都上调和,那么 $\inf(u_1,\cdots,u_n)$ 也上调和.

5. 证明:假定 $0\leqslant p\leqslant 1$,u 正上调和,那么 u^p 上调和(用 Hölder 不等式).

6. 证明:假定上调和函数列 $\{u_n\}$ 在一点 P_0 的一个邻域中一致或者单调增加地收敛于 u,那么 u 在 P_0 上调和.

7. 证明:假定 u 及 v 在一个有界区域 Ω 里调和,而在 Ω 的边界上 $u\geqslant v$,那么 $u\geqslant v$ 在 Ω 里处处成立,并且如果在某一点 $P\in\Omega$,$u(P)=v(P)$ 成立,那么在 Ω 里 $u\equiv v$.

§2.6　F. Riesz 的分解定理

§2.5 已经说明正测度的位势是上调和函数.反过来,一个上

调和函数一定是一个正测度的位势及一个调和函数的和.这就是著名的 F. Riesz 的分解定理.为了证明这个定理,先讲一点预备知识.

用 $\tau_{P,r}$ 表示单位质量在 $K(P,r)$ 上的均匀分布,即 $\tau_{P,r}=\frac{\tau}{K_n r^n}$,这里 τ 表示 E^n 的 Lebesgue 测度在 $K(P,r)$ 中的限制,K_n 表示 n 维单位开球的体积

$$K_n=\sigma_{n-1}/n=2\pi^{n/2}/n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

引理 1 假定 f 在 E^n 的子区域 D 上连续,对于 $P\in D$,令

$$f_r(P)=f_r^{(1)}(P)=\int_{E^n} f\mathrm{d}\tau_{P,r},$$

$$f_r^{(m+1)}(P)=\int_{E^n} f_r^{(m)}\mathrm{d}\tau_{P,r},\quad m=1,2,\cdots,$$

那么当 P 到 D 的边界的距离大于 mr 的时候,$f_r^{(m)}(P)$ 关于 P 的坐标是 m 次连续可微分的,$m=1,2,\cdots$.

证明 假定 P 和 P_1 的坐标分别是$(a^1,a^2,\cdots,a^n)$及$(a^1+h,a^2,\cdots,a^n)$,并且 P 和 P_1 到 D 的边界的距离大于 r,那么

$$\begin{aligned}f_r(P_1)-f_r(P)&=\int_{E^n} f\mathrm{d}(\tau_{P_1,r}-\tau_{P,r})\\&=\frac{1}{K_n r^n}\left(\int_{V_1} f\mathrm{d}\tau-\int_{V_2} f\mathrm{d}\tau\right)\\&=\frac{1}{K_n r^n}\int_0^h\int_{S(Q,r)} f\cos\gamma_1\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}x^1,\end{aligned}\quad(2.6.1)$$

这里 $V_1=K(P_1,r)\backslash K(P,r)$,$V_2=K(P,r)\backslash K(P_1,r)$,$Q$ 的坐标是$(a^1+x^1,a^2,\cdots,a^n)$,γ_1 表示从 Q 到 $S(Q,r)$上变动点的向量与 x^1 轴的交角.因此

$$\frac{\partial f_r(P)}{\partial x^1}=\frac{1}{K_n r^n}\int_{S(P,r)} f\cos\gamma_1\mathrm{d}\sigma.\qquad(2.6.2)$$

等号右边是连续的.同样可以证明 $\frac{\partial f_r(P)}{\partial x^i}(i=2,3,\cdots,n)$ 都是连

续的.

可是注意，当 f 在 $\overline{K(P,r)}$ 里连续可微分时，由 Green 公式得到

$$\frac{\partial f_r(P)}{\partial x^1} = \frac{1}{K_n r^n}\int_{K(P,r)} \frac{\partial f}{\partial x^1}\mathrm{d}\tau = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)_r. \qquad (2.6.3)$$

现在假定对某一个正整数 m，$f_r^{(m)}(P)$ 的一个 m 阶偏导数 $D^{(m)}f_r^{(m)}(P)$ 连续，那么由(2.6.3)，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^1}D^{(m)}f_r^{(m-1)} &= \frac{\partial}{\partial x^1}D^{(m)}\int f_r^{(m)}\mathrm{d}\tau_{P,r}\\ &= \frac{\partial}{\partial x^1}\int D^{(m)}f_r^{(m)}\mathrm{d}\tau_{P,r}\\ &= \frac{n}{r}\int D^{(m)}f_r^{(m)}\cos\gamma_1\mathrm{d}\varepsilon_{P,r},\end{aligned}$$

所以 $\frac{\partial}{\partial x^1}D^{(m)}f_r^{(m+1)}$ 连续. 同样 $\frac{\partial}{\partial x^i}D^{(m)}f_r^{(m+1)}(i=2,3,\cdots,n)$ 也都连续. 因此由归纳法知道定理成立. ▌

推论 1 如果 $f(P)$ 在 $\boldsymbol{E}^n$ 的子区域 D 上 Lebesgue 可积分，那么当 P 到 D 的边界的距离大于 r 时，$f_r(P)$ 连续.

证明 假定 P 和 P_1 是 D 里两点，到 D 的边界的距离都大于 r. 经过直角坐标变换后，可以使 P 和 P_1 的坐标除了第一个分量外都相同，于是得到(2.6.1)(因为 Lebesgue 测度在直角坐标变换下不变)，因此 $f_r(P)$ 连续. ▌

引理 2 假定函数 $f(P)$ 在 $\boldsymbol{E}^n$ 的一个开子集 Ω 中二次连续可微分，Δf 在一点 $P_0\in\Omega$ 满足一个 Hölder 条件，即当 r_{P_0Q} 充分小的时候，存在正数 a 及 p 使

$$|\Delta f(Q) - \Delta f(P_0)| < a r_{P_0Q}^p, \qquad (2.6.3')$$

那么对 P_0 的任何一个邻域 V，只要 $\overline{V}$ 是 Ω 的紧致子集，下面的关系成立：

$$\left[\Delta\int_V r_{PQ}^{2-n}\frac{\Delta f(Q)}{(2-n)\sigma_{n-1}}\mathrm{d}\tau_Q\right]_{P=P_0} = \Delta f(P_0), \quad n>2, \qquad (2.6.4)$$

$$\left[\Delta\int_V \log_e r_{PQ}\frac{\Delta f(Q)}{2\pi}\mathrm{d}\tau_Q\right]_{P=P_0} = \Delta f(P_0), \quad n = 2.$$

(2.6.5)

证明 假定 $n>2$. 令 $\Delta f(Q)/((2-n)\sigma_{n-1}) = k(Q)$，那么

$$\left[\Delta\int_{V\setminus K(P_0,\rho)} r_{PQ}^{2-n}k(Q)\mathrm{d}\tau_Q\right]_{P=P_0} = 0. \qquad (2.6.6)$$

这是因为可以假定 $P\in K(P_0,\rho)$，于是(2.6.6)中积分号可以与 Δ 交换. 因此(2.6.4)的左端可以写成

$$\left[\Delta\int_{K(P_0,\rho)} r_{PQ}^{2-n}k(Q)\mathrm{d}\tau_Q\right]_{P=P_0}$$

$$= \left[\Delta\int_{K(P_0,\rho)} r_{PQ}^{2-n}k(P_0)\mathrm{d}\tau_Q\right]_{P=P_0}$$

$$+ \left[\Delta\int_{K(P_0,\rho)} r_{PQ}^{2-n}\{k(Q)-k(P_0)\}\mathrm{d}\tau_Q\right]_{P=P_0}. \quad (2.6.7)$$

设 $r_{P_0P}=\delta$，那么记

$$\int_{K(P_0,\rho)} r_{PQ}^{2-n}k(P_0)\mathrm{d}\tau_Q = I_1 + I_2,$$

其中

$$I_1 = \int_{K(P_0,\delta)} r_{PQ}^{2-n}k(P_0)\mathrm{d}\tau_Q$$

$$= \int_0^\delta \sigma_{n-1}t^{n-1}\mathrm{d}t\int r_{PQ}^{2-n}k(P_0)\mathrm{d}\varepsilon_{P_0,t}(e_Q)$$

$$= \int_0^\delta \sigma_{n-1}k(P_0)\delta^{2-n}t^{n-1}\mathrm{d}t = \frac{\delta^2}{n}\sigma_{n-1}k(P_0),$$

$$I_2 = \int_{K(P_0,\rho)\setminus K(P_0,\delta)} r_{PQ}^{2-n}k(P_0)\mathrm{d}\tau_Q$$

$$= \int_\delta^\rho \sigma_{n-1}t^{n-1}\mathrm{d}t\int r_{PQ}^{2-n}k(P_0)\mathrm{d}\varepsilon_{P_0,t}(e_Q)$$

$$= \int_\delta^\rho \sigma_{n-1}k(P_0)t\mathrm{d}t = \frac{\rho^2-\delta^2}{2}\sigma_{n-1}k(P_0).$$

所以

$$\int_{K(P_0,\rho)} r_{PQ}^{2-n} k(P_0) \mathrm{d}\tau_Q = \left(\frac{\rho^2}{2} + \frac{2-n}{2n} r_{P_0P}^2\right) \sigma_{n-1} k(P_0). \tag{2.6.8}$$

所以(2.6.7)式等号右边第一项是

$$\left[\Delta\left(\frac{\rho^2}{2}+\frac{2-n}{2n}r_{P_0P}^2\right)\sigma_{n-1}k(P_0)\right]_{P=P_0}=(2-n)\sigma_{n-1}k(P_0)=\Delta f(P_0).$$

因此，为了证明(2.6.4)，只用证明(2.6.7)右边第二项为0.

假定 P 的坐标是$(x^1,\cdots,x^n)$，那么

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\int_{K(P_0,\rho)} r_{PQ}^{2-n}\{k(Q)-k(P_0)\}\mathrm{d}\tau_Q = \int_{K(P_0,\rho)} \frac{\partial}{\partial x^1} r_{PQ}^{2-n}\{k(Q)-k(P_0)\}\mathrm{d}\tau_Q.$$

事实上假定点 P_1 的坐标是$(x^1+h,x^2,\cdots,x^n)$，r_{P_0P}及 $r_{P_0P_1}$都小于正数 ρ，而 r_{PP_1}小于正数 δ，那么(令 $J=r_{PQ}^{2-n}\{k(Q)-k(P_0)\}$)

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\int_{K(P_0,\rho)} J\mathrm{d}\tau_Q = \frac{\partial}{\partial x^1}\int_{K(P,\delta)} J\mathrm{d}\tau_Q + \int_{K(P_0,\rho)\setminus K(P,\delta)} \frac{\partial J}{\partial x^1}\mathrm{d}\tau_Q. \tag{2.6.9}$$

(2.6.9)式等号右边第一项可以写成

$$\lim_{h\to 0}\int_{K(P,\delta)} \frac{1}{h}\left(r_{P_1Q}^{2-n} - r_{PQ}^{2-n}\right)\{k(Q)-k(P_0)\}\mathrm{d}\tau_Q.$$

由于

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{h}\left(r_{P_1Q}^{2-n} - r_{PQ}^{2-n}\right)\right| \\
&\quad = \left|\frac{1}{h}\left(r_{P_1Q}^{-1} - r_{PQ}^{-1}\right)\left(r_{P_1Q}^{3-n} + r_{P_1Q}^{4-n} r_{PQ}^{-1} + \cdots + r_{PQ}^{3-n}\right)\right| \\
&\quad \leqslant \left|r_{P_1Q}^{-1} r_{PQ}^{-1}\left(r_{P_1Q}^{3-n} + \cdots + r_{PQ}^{3-n}\right)\right| \\
&\quad = \sum_{j=1}^{n-2} r_{P_1Q}^{1-n-j} r_{PQ}^{-j},
\end{aligned}$$

而由 Hölder 不等式，当 $\delta\to 0$ 时，

$$\left|\int_{K(P,\delta)} r_{P_1Q}^{1-n+j} r_{PQ}^{-j} \mathrm{d}\mu(e_Q)\right|$$

$$\leqslant \left(\int_{K(P,\delta)} r_{P_1Q}^{1-n} \mathrm{d}\mu(e_Q)\right)^{\frac{n-j-1}{n-1}} \left(\int_{K(P,\delta)} r_{PQ}^{1-n} \mathrm{d}\mu(e_Q)\right)^{\frac{j}{n-1}}$$

$$\to 0,$$

这里

$$\mu(e) = \int_e |k(Q) - k(P_0)| \mathrm{d}\tau_Q.$$

因此，由(2.6.9)得到

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\int_{K(P_0,\rho)} r_{PQ}^{2-n}\{k(Q) - k(P_0)\}\mathrm{d}\tau_Q$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\int_{K(P_0,\rho)\setminus K(P,\delta)} (n-2) r_{PQ}^{-n}(\xi^1 - x^1)\{k(Q) - k(P_0)\}\mathrm{d}\tau_Q$$

$$= \int_{K(P_0,\rho)} (n-2) r_{PQ}^{-n}(\xi^1 - x^1)\{k(Q) - k(P_0)\}\mathrm{d}\tau_Q. \tag{2.6.10}$$

最后一个等号是由于被积分式可积分的缘故.

设 P_0 的坐标为$(x_0^1, x_0^2, \cdots, x_0^n)$，由(2.6.10)得到

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^{1^2}}\int_{K(P_0,\rho)} r_{PQ}^{2-n}\{k(Q) - k(P_0)\}\mathrm{d}\tau_Q\right]_{P=P_0}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x^1}\int_{K(P_0,\rho)} (n-2) r_{PQ}^{-n}(\xi^1 - x^1)\{k(Q) - k(P_0)\}\mathrm{d}\tau_Q\right]_{P=P_0}$$

$$= \lim_{h\to 0}\int_{K(P_0,\rho)} \frac{n-2}{h}\left[r_{P_1Q}^{-n}(\xi^1 - x_0^1 - h) - r_{P_0Q}^{-n}(\xi^1 - x_0^1)\right]$$

$$\times \{k(Q) - k(P_0)\}\mathrm{d}\tau_Q. \tag{2.6.11}$$

利用前面类似的估计及(2.6.3)，可得到最后这积分的被积分式的绝对值小于 $r_{P_0Q}^{\beta}$的常数倍，因此可积分. 所以当 $\rho\to 0$ 时，(2.6.11) 等号右边的式子趋于 0. 把 x^1 换成其他的 $x^i(i=2,\cdots,n)$情形也一样. 所以

$$\lim_{\rho\to 0}\Delta\int_{K(P_0,\rho)} r_{PQ}^{2-n}\{k(Q)-k(P_0)\}\mathrm{d}\tau_Q = 0. \qquad (2.6.12)$$

这就证明了(2.6.4).

$n=2$ 的情况类似. ▌

由引理 2 马上得到下面的

定理 2.6.1 假定 $f(P)$在区域 Ω 里二次连续可微分，Δf 在每一点 $P\in\Omega$ 满足一个 Hölder 条件，那么对 Ω 的任何一个有紧致包的开子集 V，存在调和函数 v 及测度 ν，支柱包含在 $\overline{V}$ 里，使

$$f(P)=U^{\nu}(P)+v(P), \quad P\in V.$$

在 $|\nu|(C(V))=0$ 的条件下，ν 和 v 是唯一决定的.

证明 事实上，令

$$\nu(e)=\int_{e\cap V} k(Q)\mathrm{d}\tau_Q,$$

就知道 $\Delta U^{\nu}=\Delta f$ 在 V 中成立，所以 $f-U^{\nu}$ 调和. 至于这样的 ν 和 v 唯一，那由定理 2.5.5 就可以知道. ▌

引理 3 假定 u 在区域 Ω 中二次连续可微分，那么 u 上调和的充分而且必要的条件是在 Ω 中 $\Delta u\leqslant 0$.

证明 任意取一点 $P\in\Omega$，取正数 ρ 充分小使$\overline{K(P,\rho)}\subset\Omega$，那么由 Green 公式可得

$$\int_{K(P,\rho)}\Delta u\mathrm{d}\tau=\int_{S(P,\rho)}\frac{\partial u}{\partial\rho}\mathrm{d}\sigma=\sigma_{n-1}\rho^{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P,\rho}. \qquad (2.6.13)$$

如果 $\Delta u\leqslant 0$，那么$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P,\rho}\leqslant 0$. 因此$\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P,\rho}$ 随 ρ 增加而减小. 但是在 $\rho=0$，$\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P,\rho}$ 看作 ρ 的函数是连续的，并且数值等于 $u(P)$，所以得到

$$\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P,\rho}\leqslant u(P).$$

反过来，如果在某一点 P_0，$\Delta u(P_0)>0$，那么取 ρ 充分小的时候，$\Delta u>0$ 在 $K(P_0,\rho)$ 里成立. 所以由(2.6.13)知道$\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P_0,\rho}$随 ρ 的增

加而增加. 因此

$$\int u \mathrm{d}\varepsilon_{P_0,\rho} > u(P_0).$$

因此,$u(P)$在 P_0 不是上调和的. ▍

引理 4 假定 u 在区域 $\Omega \subseteq E^n$ 里上调和,S 是 Ω 的任何一个子集,S 到 Ω 的边界的距离是 δ,那么对任何正数 $\rho < \frac{\delta}{m}(m=1, 2,\cdots)$,$u_\rho^{(m)}$ 在 S 里上调和,随 ρ 的减小而增加,并且当 $\rho \to 0$ 时收敛于 u.

证明 先证明 $m=1$ 的情况. 首先,

$$u_\rho(P) = \frac{n}{\rho^n}\int_0^\rho t^{n-1}\int u \mathrm{d}\varepsilon_{P,t}\,\mathrm{d}t. \tag{2.6.14}$$

由于 $\lim\limits_{t\to 0}\int u \mathrm{d}\varepsilon_{P,t} = u(P)$, 可得到

$$\lim_{\rho\to 0} u_\rho(P) = u(P). \tag{2.6.15}$$

又由(2.6.14)得到,对任何充分小的正数 ρ,

$$u_\rho(P) \leqslant u(P). \tag{2.6.16}$$

现在取正整数 $k > 1/\delta$,于是

$$\lim_{m\to\infty} u_{1/mk}(P) = u(P), \quad P \in S.$$

令

$$f_m(P) = \sup\{u_{1/k}(P),\cdots,u_{1/mk}(P)\},$$

那么$\{f_m(P)\}$是一个单调增加列,$f_m(P)$连续,并且当 $m\to\infty$的时候收敛于 $u(P)$. ①

由这个事实可以证明:当 ρ 充分小时,$\int u \mathrm{d}\varepsilon_{P,\rho}$ 随 ρ 减小而增加. 为了证明这一点, 在 $K(P,\rho)$里造调和函数 H_m,它以 f_m 为边界值. 于是当 $0<\beta<\rho$ 的时候,

---

① Batre 曾经证明过更一般的定理:只要假定 f 在一个紧致集里下半连续,就存在一列连续函数单调增加地收敛于 f.

$$\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P,\rho}=\lim_{m\to\infty}\int f_m\mathrm{d}\varepsilon_{P,\rho}=\lim_{m\to\infty}H_m(P)$$
$$=\lim_{m\to\infty}\int H_m\mathrm{d}\varepsilon_{P,\beta}\leqslant\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P,\beta}.$$

因此又知道 ρ 充分小时，u_ρ 随 ρ 减小而增加，因为当 $0<\beta<\rho$ 的时候，

$$u_\rho(P)=\frac{n}{\sigma_{n-1}\rho^n}\int_0^\rho\int_{S(P,t)}u\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t=\frac{n}{\rho^n}\int_0^\rho t^{n-1}\mathrm{d}t\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P,t}$$
$$=n\int_0^1\xi^{n-1}\mathrm{d}\xi\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P,\rho\xi}\leqslant n\int_0^1\xi^{n-1}\mathrm{d}\xi\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P,\beta\xi}=u_\beta(P).$$

还要证明在子集 S 中，当 $\rho<\delta$ 时，$u_\rho(P)$ 在 S 里上调和. 假定 $P\in S$，那么当 $\rho<\rho+r<\delta$ 时，可以造一个函数 H，它在 $K(P,r)$ 里调和，以 u_ρ 为边界值. 于是

$$\int u_\rho(Q)\mathrm{d}\varepsilon_{P,r}(e_Q)=H(P)$$
$$=\int u\mathrm{d}\tau_{P,r}\leqslant\int u\mathrm{d}\tau_{P,\rho}=u_\rho(P).$$

最后利用归纳法证明这个引理对任何正整数 m 成立. 事实上，假定 $m=k$ 时引理的结论是对的，那么 $u_\rho^{(k+1)}(P)$ 在 S 里上调和，随 ρ 的减小而增加，并且

$$\lim_{\rho\to0}u_\rho^{(k+1)}(P)\geqslant\lim_{\rho\to0}\left(u_r^{(k)}\right)_\rho(P)=u_r^{(k)}(P).$$

但是对任何正数 ε，当 r 充分小的时候，$u_r^{(k)}(P)>u(P)-\varepsilon$，所以

$$\lim_{\rho\to0}u_\rho^{(k+1)}(P)\geqslant u(P).$$

另外一方面，$u_\rho^{(k+1)}(P)\leqslant u_\rho^{(k)}(P)\leqslant u(P)$. 所以上面这极限必须等于 $u(P)$. ▎

引理 5 假定 u 在 $K(P,R)$ 里上调和，那么 $\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P,r}$ 是 r 的减小函数，并且是 $-r^{2-n}(n>2)$ 或 $\log_e r$ $(n=2)$ 的连续凹函数.

证明 假定 $n>2$，$0\leqslant r_1<r_2<R$. 取正数 ρ 充分小，那么 $u_\rho^{(3)}$ 在 $K(P,R-3\rho)$ 里上调和，并且二次连续可微分. 所以由 Green 公

式，

$$0 \geqslant \int_{K(P,r_2)\setminus K(P,r_1)} \Delta u_\rho^{(3)} \mathrm{d}\tau$$

$$= \sigma_{n-1}\left[r_2^{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_2}\int u_\rho^{(3)}\mathrm{d}\varepsilon_{P,r_2} - r_1^{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_1}\int u_\rho^{(3)}\mathrm{d}\varepsilon_{P,r_1}\right].$$

令 $t=-r^{2-n}$，那么由上面不等式得到 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int u_\rho^{(3)}\mathrm{d}\varepsilon_{P,r}\leqslant 0$. 因此 $\int u_\rho^{(3)}\mathrm{d}\varepsilon_{P,r}$ 是 t 的凹函数，即当 $r_2>r>r_1$ 时，

$$(-r_2^{2-n}+r_1^{2-n})\int u_\rho^{(3)}\mathrm{d}\varepsilon_{P,r}$$

$$\geqslant(-r^{2-n}+r_1^{2-n})\int u_\rho^{(3)}\mathrm{d}\varepsilon_{P,r_2}$$

$$+(-r_2^{2-n}+r^{2-n})\int u_\rho^{(3)}\mathrm{d}\varepsilon_{P,r_1}.$$

由于当 $\rho\to 0$ 时，$u_\rho^{(3)}$ 单调增加地趋于 u，上面不等式中的 $u_\rho^{(3)}$ 可以改为 u. 所以 $\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P,r}$ 是 $-r^{2-n}$ 的凹函数. 现在 $\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P,r}\geqslant\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P,r_2}$，所以 $\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P,r}$ 有下界，因此连续. 至于 $\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P,r}$ 关于 r 单调减小，前面的引理 4 已经说明.

$n=2$ 的情况类似. ▍

定理 2.6.2(F. Riesz 的分解定理) 假定 $u(P)$ 在一个区域 $\Omega\subseteq E^n$ 里上调和，那么对 Ω 的任何一个有紧致包的开子集 V，存在调和函数 v 和正测度 μ，μ 的支柱包含在 $\overline{V}$ 里，使

$$u(P)=U^\mu(P)+v(P),\quad P\in V.$$

在 $|\mu|(C(V))=0$ 的条件下，μ 和 v 是唯一决定的.

证明 由引理 1 及引理 4，对充分小的正数 ρ，$u_\rho^{(4)}$ 是上调和函数，并且 $\Delta u_\rho^{(4)}$ 在 V 中满足一个 Hölder 条件. 因此由定理 2.6.1，知道存在一个调和函数 w 和一个支柱包含在 $\overline{V}$ 里的测度 μ_ρ，使在 V 中有

$$u_\rho^{(4)} = U^{\mu_\rho} + w.$$

由引理 3，μ_ρ 是正测度.

现在对任何一个闭球$\overline{K(P,r)}\subset\Omega$，当 $n>2$，$r'<r<r''$，有

$$0\geqslant\int_{\overline{K(P,r)}}\Delta u_\rho^{(4)}\mathrm{d}\tau=\int_{S(P,r)}\frac{\partial u_\rho^{(4)}}{\partial r}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\sigma_{n-1}r^{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int u_\rho^{(4)}\mathrm{d}\varepsilon_{\rho,r}$$

$$\geqslant(2-n)\sigma_{n-1}\frac{\int u_\rho^{(4)}\mathrm{d}\varepsilon_{P,r''}-\int u_\rho^{(4)}\mathrm{d}\varepsilon_{P,r'}}{(r'')^{2-n}-(r')^{2-n}}$$

$$\to(2-n)\sigma_{n-1}\frac{\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P,r''}-\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P,r'}}{(r'')^{2-n}-(r')^{2-n}},\quad \rho\to 0.$$

当 $n=2$ 时，上面第二个不等式右端改为

$$2\pi\frac{\int u_\rho^{(4)}\mathrm{d}\varepsilon_{P,r''}-\int u_\rho^{(4)}\mathrm{d}\varepsilon_{P,r'}}{\log_e r''-\log_e r'}$$

$$\to 2\pi\frac{\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P,r''}-\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P,r'}}{\log_e r''-\log_e r'},\quad \rho\to 0.$$

这说明 $\mu_\rho(\overline{K(P,r)})$关于 ρ 是有界的，因此 μ_ρ 在任何一个紧致集上关于 ρ 有界. 所以由选择定理，存在一列$\{\mu_{\rho_i}\}$浑收敛于一个正测度 μ，μ 的支柱包含在 $\overline{V}$ 里. 现在证明 $u-U^\mu$ 在 V 里调和. 令 $v=u-U^\mu$，那么对任何一点 $P\in V$，

$$\int v\mathrm{d}\varepsilon_{P,r}=\int u\mathrm{d}\varepsilon_{P,r}-\int U^{\varepsilon_{P,r}}\mathrm{d}\mu$$

$$=\lim_{\rho_i\to 0}\left(\int u_{\rho_i}^{(4)}\mathrm{d}\varepsilon_{P,r}-\int U^{\varepsilon_{P,r}}\mathrm{d}\mu_{\rho_i}\right)$$

$$=\lim_{\rho_i\to 0}\int(u_{\rho_i}^{(4)}-U^{\mu_{\rho_i}})\mathrm{d}\varepsilon_{P,r}$$

$$=\lim_{\rho_i\to 0}(u_{\rho_i}^{(4)}(P)-U^{\mu_{\rho_i}}(P)).$$

所以当 r 充分小的时候,

$$\int v\mathrm{d}\varepsilon_{P,r} = \int u\mathrm{d}\varepsilon_{P,r} - \int U^{\mu}\mathrm{d}\varepsilon_{P,r}$$

跟 r 无关. 等号右边由于 u 和 U^{μ} 上调和,当 $r\to 0$ 时趋于 $u(P)-U^{\mu}(P)=v(P)$. 所以

$$\int v\mathrm{d}\varepsilon_{P,r} = v(P).$$

此外,由于 $\int v\mathrm{d}\varepsilon_{P,r}$ 跟 r 无关,v_ρ 也跟 ρ 无关,因此

$$v_\rho(P) = v(P).$$

v_ρ 连续,所以 v 也连续,因此 v 调和.

μ 和 v 是唯一的,因为在 V 里如果

$$u = U^{\mu_1} + v_1,$$

那么

$$0 = U^{\mu-\mu_1} + (v - v_1).$$

因此,$U^{\mu-\mu_1}$是调和函数. 所以 $\mu=\mu_1$. 因此 $v=v_1$. ▌

由 F. Riesz 的分解定理知道,假定 K' 及 K''是两个有紧致包的子区域,$K'\subseteq K''\subset\overline{K''}\subset\Omega$,那么对一个在 Ω 里上调和的函数 u,存在正测度 μ' 及 μ'',使

$$u(P) = U^{\mu'}(P) + v'(P), \quad P\in K',$$

$$u(P) = U^{\mu''}(P) + v''(P), \quad P\in K''.$$

由于 $K'\subseteq K''$,对于 $P\in K'$,上面两个等式同时成立,因此

$$0 = U^{\mu''-\mu'}(P) + v''(P) - v'(P), \quad P\in K'.$$

因此,$U^{\mu''-\mu'}$在 K' 里调和,所以 μ' 就是 μ''在 K' 上的限制,即

$$\mu' = \mu''|K'. \tag{2.6.17}$$

现在对 Ω 的任何一个 Borel 子集 e 定义

$$\mu(e) = \sup\{\mu(C)|C \text{ 紧致}, C\subseteq e\},$$

这里 $\mu(C)$表示 μ 在任何一个包含 C 的在 Ω 里有紧致包的子区域 K' 上所决定的测度. 由于(2.6.17),μ 跟 K' 的选择无关.

μ 有下面的性质:

(1) 对 Ω 的任何一个(B)子集 e,$\mu(e)$是一个实数或$\pm\infty$. 特别当 e 紧致时,$\mu(e)$有限.

(2) 对 Ω 的任何可列个(B)子集 $e_1, e_2, \cdots$,当 $i \neq j$ 时,$e_i \cap e_j = \varnothing$,就有

$$\mu(e_1 \cup e_2 \cup \cdots) = \mu(e_1) + \mu(e_2) + \cdots.$$

凡满足(1),(2)两个性质的 μ 称为**相对于 Ω 的一个测度**,它不一定是 $\boldsymbol{E}^n$ 的一个测度在 Ω 上的限制. 特别,如果对所有(B)集 $e \subseteq \Omega$,$\mu(e) \geqslant 0$,那么 μ 称为**相对于 Ω 的一个正测度**. 上面所得到的 μ 就是这样的.

用这些概念,分解定理可以表述如下:

定理 2.6.2′ 假定 u 是区域 Ω 里的一个上调和函数,那么存在一个唯一的相对于 Ω 的正测度 μ,使对 Ω 的任何一个有紧致包的开子集 D,

$$u(P) = U^{\mu|D}(P) + v_D(P), \tag{2.6.18}$$

这里 v_D 是一个调和函数,在满足(2.6.18)的限制下是唯一的.

习 题

1. 证明:如果实函数 u 在 $P_0 \in \boldsymbol{E}^n$ 的一个邻域中有定义,$u > -\infty$,并且 u 不恒等于 $+\infty$,那么 u 在 P_0 上调和的充分而且必要的条件是 u 在 P_0 下半连续,并且对一切充分小的正数 ρ,$u_\rho(P) \leqslant u(P)$.

2. 把 F. Riesz 的分解定理推广到两个上调和的差的情况.

§2.7 相对于开球的 Green 位势

假定 μ 是相对于开球 $K(O,R)$ 的一个 Radon 测度,$G(P,Q)$ 是 $K(O,R)$ 的 Green 函数,那么我们把

$$U^{\mu}_{K(O,R)}(P) = \int_{K(O,R)} G(P,Q)\,\mathrm{d}\mu(e_Q), \quad P \in K(O,R) \tag{2.7.1}$$

称为 μ **相对于** $K(O,R)$ **的 Green 位势**. 特别,当 $Q\in K(O,R)$ 时,ε_Q 的 Green 位势就是 $G(P,Q)$.

下面经常假定(2.7.1)式右边的积分是确定的,$U^{\mu}_{K(O,R)}$ 也简写作 U^{μ}.

当 $n>2$ 的时候,令 $R\to\infty$,我们看到 $G(P,Q)$ 单调增加地收敛于 r_{PQ}^{2-n},因此 r_{PQ}^{2-n} 可以看作 $K(O,\infty)$ 的 Green 函数,而 Newton 位势 U^{μ}_n 可以看作相对于 $K(O,\infty)$ 的 Green 位势 $U^{\mu}_{K(O,\infty)}$. 可是当 $n=2$ 时,对数位势无法看作相对于开圆的 Green 位势的特例. 所以,相对于 $K(O,R)$ 的 Green 位势理论是 Newton 位势理论的推广,而不是对数位势理论的推广. 下面规定:当 $n>2$ 时,R 可以等于 ∞;但是当 $n=2$ 时,限制 $O<R<\infty$.

另外一方面,根据 §2.4 中 $G(P,Q)$ 的表示式,我们知道当 $P\in K(O,R)\setminus\{O\}$ 时,

$$U^{\mu}_{K(O,R)}(P)=\begin{cases}U^{\mu}_n(P)-r_{OP}^{2-n}R^{n-2}U^{\mu}_n(\widetilde{P}), & n>2,\\ U^{\mu}_n(P)-U^{\mu}_n(\widetilde{P})+\log_e\dfrac{r_{OP}}{R}\mu(K(O,R)), & n=2.\end{cases}$$

所以相对于 $K(O,R)$ 的 Green 位势又可以用 U^{μ}_n 来表示. 这种表示法还可以有另外的形式,比方,如果令

$$G(P,Q)=U^{\varepsilon_P}_n(Q)+H(P,Q),$$

那么 $H(P,Q)$ 是以 $-U^{\varepsilon_P}_n(Q)$ 为边界值的 $K(O,R)$ 里的调和函数,所以由定理 2.4.2 知道

$$H(P,Q)=\frac{-1}{c_n}\int_{S(O,R)}U^{\varepsilon_P}_n(M)\frac{\partial G(Q,M)}{\partial N_M}\mathrm{d}\sigma_M.$$

因此,对于一个相对于 $K(O,R)$ 的 Radon 测度 μ,由 Fubini 定理可得

$$\begin{aligned}U^{\mu}_{K(O,R)}(P)&=\int[U^{\varepsilon_P}_n(Q)+H(P,Q)]\mathrm{d}\mu(e_Q)\\ &=U^{\mu}_n(P)-\frac{1}{c_n}\iint_{S(O,R)}U^{\varepsilon_P}_n(M)\frac{\partial G(Q,M)}{\partial N_M}\mathrm{d}\sigma_M\mathrm{d}\mu(e_Q)\end{aligned}$$

$$= U_n^{\mu}(P) - U_n^{\mu'}(P), \tag{2.7.2}$$

这里 μ' 是分布在 $S(O,R)$ 上的一个测度，对任何 (B) 集 e，

$$\mu'(e) = \frac{1}{c_n} \int\limits_{e \cap S(O,R)} \int \frac{\partial G(Q,M)}{\partial N_M} \mathrm{d}\mu(e_Q) \mathrm{d}\sigma_M. \tag{2.7.3}$$

在上面的讨论中，假定把相对于 $K(O,R)$ 的测度 μ 以 $\mu(A) = \mu(A \cap K(O,R))$ 延拓到任何 (B) 集 $A \subseteq \boldsymbol{E}^n$. 因此，(2.7.1) 的积分域也可以是 $\boldsymbol{E}^n$. 同时，自然假定在演算过程中没碰到不确定的情况，比方，μ 的总质量有限的时候就行了.

在 (2.7.2) 里令 $\mu = \varepsilon_Q, Q \in K(O,R)$，就可以得到

$$G(P,Q) = U_{K(O,R)}^{\varepsilon_Q}(P) = U_n^{\varepsilon_Q}(P) - U_n^{\varepsilon'_Q}(P).$$

由于 $G(P,Q)$ 可以用 0 连续地延拓到 $C(K(O,R))$ 里去，而且 $-\varepsilon'_Q$ 是分布在 $S(O,R)$ 上的测度，我们看到 $-\varepsilon'_Q$ 在 $C(K(O,R))$ 里产生的位势和 $U_n^{\varepsilon_Q}$ 相等而符号相反. 用物理学的话来说，$-\varepsilon'_Q$ 是点电荷 ε_Q 在 $S(O,R)$ 上感应出来的电荷分布. 由于这感应电荷的抵消，点电荷 ε_Q 的存在对 $K(O,R)$ 外部的空间没有影响了. 因此，$U_{K(O,R)}^{\varepsilon_Q}$ 可以看作 ε_Q 相对于 $K(O,R)$ 的电场位势，由于同样原因我们也可以把 $U_{K(O,R)}^{\mu}$ 看作 μ 相对于 $K(O,R)$ 的电场位势，虽然它不一定可以用 0 连续延拓到 $C(K(O,R))$ 里去.

以后，当我们建立了一般区域的 Green 函数和 Green 位势的概念时，类似的物理解释也是适用的，现在暂时不谈. 现在我们要把 F. Riesz 的分解定理推广到相对于开球的 Green 位势上来.

定理 2.7.1 假定 $u(P)$ 在 $\boldsymbol{E}^n$ 的开子球 $K(O,R)$ 里上调和，那么存在一个唯一的相对于 $K(O,R)$ 的正 Radon 测度 μ，使对 $K(O,R)$ 的任何一个相对紧致的开子集 S，

$$u(P) = U_{K(O,R)}^{\mu|S}(P) + v_S(P), \quad P \in S,$$

这里 v_S 是一个在 S 里调和的函数，一般跟 S 有关.

证明 由 F. Riesz 的分解定理，存在一个唯一的相对于 $K(O,R)$ 的正测度，使

$$u(P) = U_n^{\mu'' S}(P) + v_S''(P), \quad P \in S,$$

v_S''在 S 里调和. 因此

$$u(P) = U_{K(O,R)}^{\mu|S}(P) + v_S''(P) + U_n^{\mu'' S}(P).$$

令 $v_S(P) = v_S''(P) + U_n^{\mu'' S}(P)$, 就得到定理 2.7.1. ▌

定理 2.7.2(**M. Brelot, H. Cartan**) 令 u 是 $\boldsymbol{E}^n$ 的开子球 $K(O,R)$ 里一个正的上调和函数, 则 u 是一个相对于 $K(O,R)$ 的正测度 μ 的 Green 位势(不恒等于∞)的充分而且必要的条件是

$$\lim_{r \to R} \int u \mathrm{d}\varepsilon_{O,r} = 0.$$

证明 **必要性** 假定 μ 是相对于 $K(O,R)$ 的一个正测度, $U^\mu \not\equiv \infty$, 那么存在一点 P, 使

$$U^\mu(P) = \int G(P,Q) \mathrm{d}\mu(e_Q) < \infty. \tag{2.7.4}$$

我们先证明对任何正数 r, $0<r<R$, $\int U^\mu \mathrm{d}\varepsilon_{O,r}$ 存在. 事实上, 由倒反律(定理 2.2.1 是针对 $\boldsymbol{E}^n$ 的, 但对 $K(O,R)$ 也成立),

$$\int U^\mu \mathrm{d}\varepsilon_{O,r} = \int U^{\varepsilon_{O,r}} \mathrm{d}\mu. \tag{2.7.5}$$

$U^{\varepsilon_{O,r}}(Q)$ 在$\overline{K(O,R)}$里正、有界、连续, 并且在 $K(O,R)$ 以及 $K(O,R) \setminus \overline{K(O,r)}$ 里调和. 假定

$$\sup_{Q \in S(O,r)} U^{\varepsilon_{O,r}}(Q) = M, \quad \inf_{Q \in S(O,r)} G(P,Q) = m,$$

那么,

$$\frac{M}{m} G(P,Q) \geqslant U^{\varepsilon_{O,r}}(Q)$$

在 $S(O,r)$ 上成立. 在 $S(O,R)$ 上面不等式也成立, 因为不等式两边都是 0. 在 $K(O,r)$ 或者 $K(O,R) \setminus \overline{K(O,r)}$ 里, 不等式右边是上调和函数, 左边是调和函数. 所以由上调和函数的极小值原理, 这不等式在 $K(O,R)$ 里成立. 因此, 由(2.7.4)知道 $U^{\varepsilon_{O,r}}(Q)$ 关于 μ 可积分. 因此(2.7.5)式等号左边的平均值 $\int U^\mu \mathrm{d}\varepsilon_{O,r}$ 存在.

现在，当 $r\to R$ 的时候，$U^{\varepsilon_{O,r}}(Q)$单调减小地趋于 0. 所以，由 Lebesgue 收敛定理，

$$\lim_{r\to R}\int U^{\mu}\mathrm{d}\varepsilon_{O,r} = \lim_{r\to R}\int U^{\varepsilon_{O,r}}\mathrm{d}\mu$$

$$= \int \lim_{r\to R} U^{\varepsilon_{O,r}}\mathrm{d}\mu = 0.$$

充分性 假定 u 在 $K(O,R)$里上调和，那么对任何正数 ρ，$0<\rho<R$，由定理 2.7.1 知道存在一个相对于 $K(O,R)$的正测度 μ，使 $u(P)-U^{\mu|K(O,\rho)}(P)$在 $K(O,\rho)$里调和. 我们证明它在 $K(O,R)$里上调和. 事实上，$U^{\mu|K(O,\rho)}(P)$在 $K(O,R)\setminus\overline{K(O,\rho)}$里调和，所以 $u(P)-U^{\mu|K(O,\rho)}(P)$在 $K(O,R)\setminus\overline{K(O,\rho)}$里上调和. 当 $P\in S(O,\rho)$时，

$$u(P) = U^{\mu|K(O,\rho')}(P) + v'(P),$$

其中 $\rho<\rho'<R$ 而 $v'(P)$调和. 因此，

$$u(P) - U^{\mu|K(O,\rho)}(P) = U^{\mu|(K(O,\rho')\setminus K(O,\rho))}(P) + v'(P)$$

上调和(因为 $\mu|K(O,\rho')\setminus K(O,\rho)$是正测度).

现在当 $r_{OP}\to R$ 时，$U^{\mu|K(O,\rho)}(P)\to 0$，而 $u\geqslant 0$，所以由上调和函数的极小值性质可得到

$$u - U^{\mu|K(O,\rho)} \geqslant 0. \tag{2.7.6}$$

我们证明当 $\rho\to R$ 时，$u-U^{\mu|K(O,\rho)}$收敛于一个调和函数. 随便取一点 $P\in K(O,R)$，可以取一个正数 $\rho_0<R$，使 $P\in K(O,\rho_0)$. 而当 $\rho>\rho_0$ 时，$u-U^{\mu|K(O,\rho)}$在 $K(O,\rho_0)$里调和，并且随 ρ 的增加而减小. 由(2.7.6)知道，它在原点 O 的数值有下界，因此由 Harnack 定理知道，$u-U^{\mu|K(O,\rho)}$随 $\rho\to R$ 而趋于一个在 $K(O,\rho_0)$里调和的函数 v. 特别，v 在 P 调和，因此 v 在任意一点 $P\in K(O,R)$调和.

另一方面，$v\leqslant u$. 假定定理的条件成立，当 $r_{OP}\to R$ 时，$\int u\mathrm{d}\varepsilon_{O,r}\to 0$，那么由调和函数的极大值性质就知道 $v(O)\leqslant 0$. 由(2.7.6)知道，$v\geqslant 0$. 所以得到 $v=0$，也就是

$$\lim_{\rho\to R}(u - U^{\mu|K(O,\rho)}) = 0. \tag{2.7.7}$$

用 χ_ρ 表示 $K(O,\rho)$ 的特征函数，那么 $G(P,Q)\chi_\rho(Q)$ 随着 ρ 增加. 所以由 Lebesgue 收敛定理，

$$\lim_{\rho\to R}\int G(P,Q)\mathrm{d}(\mu|K(O,\rho))(e_Q) = \lim_{\rho\to R}\int G(P,Q)\chi_\rho(Q)\mathrm{d}\mu$$

$$= \int \lim_{\rho\to R} G(P,Q)\chi_\rho(Q)\mathrm{d}\mu = \int G(P,Q)\mathrm{d}\mu. \qquad (2.7.8)$$

由(2.7.7)和(2.7.8)得到 $u=U^\mu$. ▌

推论 1(H. Cartan) 假定 u 在 $K(O,R)$ 里为正而且上调和，再假定

$$u(P) \leqslant U^\mu_{K(O,R)}(P) \not\equiv \infty, \quad P\in K(O,R),$$

这里 μ 是一个相对于 $K(O,R)$ 的正测度，那么 $u(P)$ 是一个 Green 位势.

证明 因为这样的 u 满足定理 2.7.2 的条件. ▌

假定 u 在一个区域 Ω 里上调和，v 在 Ω 里调和，$v\leqslant u$ 成立，那么 v 称为 u 在 Ω 里的一个**调和下属**.

推论 2(F. Riesz) 假定一个上调和函数 u 在 $K(O,R)$ 里有调和下属，那么存在一个相对于 $K(O,R)$ 的正测度 μ，使

$$u = U^\mu_{K(O,R)} + h, \quad h \leqslant u,$$

其中 h 是 u 在 $K(O,R)$ 里的**最大的调和下属**.

习 题

1. 证明推论 2.

2. 证明：假定 μ 的总质量有限，那么(2.7.3)中的 μ' 的总质量等于 μ 的总质量.

第三章 扫 除 法

把一个带电物体放在金属容器内，然后用一根铜丝把容器表面连到地面上去. 可以假定地面上的电位不受这个带电物体的影响，仍旧是 0，于是容器表面和容器外部的电位也是 0. 用物理的话来讲，这是由于容器表面受到带电物体的感应，出现了电荷. 这个感应电荷跟带电物体在容器外部造成大小相等但是符号相反的电场，因此互相抵消. 这说明对容器外部的空间来说，带电物体可以用一个分布在容器表面上的电荷所代替.

对流体运动也可以作类似的想象. 假定观测者与源泉被一个闭曲面隔开，那么在观测者看来，流体运动仿佛是由分布在这曲面上的源泉造成的.

把支柱包含在一个点集内部的测度换作一个分布在这个点集边界上的测度，但不影响在这点集外部原来测定的位势的数值，这样一个原理在位势论中叫做**扫除**. 说得详细一些，这是把点集内部的质量扫到边界上去. 像前面说的那样，扫除的想法并不缺乏传统的物理的解释，可是在一般的数学的提法下，用测度的概念把它严格地建立起来，却还不过是 30 年代的事情，是位势论的近代发展的主要开端之一. 这个扫除原理首先是 Frostman、de la Vallée Poussin 等人完成的. 下面我们采用 H. Cartan 在 1945～1946 所作的论证方式.

扫除这个名字最早是 Poincaré 在 1899 年取的，他由于研究调和函数的 Dirichlet 问题想到这个方法. 假定一个区域 Ω 的边界上已经给了一个函数 f，又假定可以把 f 延拓到整个 $\bar{\Omega}$ 上来成为一个充分光滑(比方说三次连续可微分)的函数，当然可能 $\Delta f \neq 0$. 不过由定理 2.6.1 我们知道 Δf 表示物质密度的常数倍. 因此

要作一个在 Ω 里调和并以 f 为边界值的函数，可以看成是把 Ω 内部的质量扫到边界上去的过程. 在某种特殊情况下，Poincaré 通过扫除的想法的确成功地解答了 Dirichlet 问题，但是由于缺乏明确的测度论的概念，在他的著作中，扫除法实际上只有某种象征性的意义，他的论证方式跟 Schwarz 及 Neumann 所创始的交错法大体上是同一个类型的. Dirichlet 问题的这个类型的解法的近代讲法是 Perron，F. Riesz，Wiener，Brelot 等人的上调和函数论. 这构成近代位势理论的另一个主要的基础. 通过这个理论系统同样可以建立扫除原理，不过我们在这一章不采取这样的办法.

§3.1 候补 Hilbert 空间及投影

定义 假定 L 是一个实线性空间，其中任何两个元素 λ 和 μ 都对应一个实数 (λ,μ)，叫做 λ 和 μ 的**内积**，使对 L 中任何元素 λ，μ，ω 以及任何实数 a，b，下列关系成立：

(1) $(a\lambda+b\mu,\omega)=a(\lambda,\omega)+b(\mu,\omega)$；

(2) $(\lambda,\mu)=(\mu,\lambda)$；

(3) $(\lambda,\lambda)\geqslant 0$，等号只当 λ 是 L 的零元素时成立，

那么说 L 是一个**候补(实)Hilbert 空间**或**准(实)Hilbert 空间**.

引理 1 假定 L 是一个候补 Hilbert 空间，那么对 L 中任何两个元素 λ，μ，下式成立：

$$(\lambda,\mu)^2\leqslant(\lambda,\lambda)(\mu,\mu).$$

证明 由定义，对任何实数 x，下列不等式成立：

$$0\leqslant(\lambda+x\mu,\lambda+x\mu)=(\lambda,\lambda)+2x(\lambda,\mu)+x^2(\mu,\mu).$$

因此最右端这个二次多项式的判别式必须非正，也就是

$$(\lambda,\mu)^2\leqslant(\lambda,\lambda)(\mu,\mu). \quad \blacksquare$$

对一个候补 Hilbert 空间的每个元素 λ，把 $\|\lambda\|=\sqrt{(\lambda,\lambda)}$ 称作 λ 的**范数**. 由定义和引理 1，这种范数有下列性质：

(1) 对任何实数 a 及任何 $\lambda\in L$，$\|a\lambda\|=|a|\,\|\lambda\|$；

(2) 对任何 $\lambda \in L$, $\|\lambda\| \geqslant 0$,而等号只当 λ 是零元素时成立;

(3) 对任何 $\lambda \in L$ 及 $\mu \in L$, $\|\lambda+\mu\| \leqslant \|\lambda\| + \|\mu\|$.

所以对候补 Hilbert 空间中任何两个元素 λ, μ, 可以把 $\|\lambda-\mu\|$ 规定作它们的距离. 在这尺度下 L 成了一个实线性尺度空间. 特别当 L 在这个尺度下完备的时候,就说 L 是一个 **Hilbert 空间**.

假定 S 是一个实线性空间的子集,而对任何 $\alpha \in S$ 及 $\beta \in S$,任何实数 $r \in [0,1]$,有 $r\alpha + (1-r)\beta \in S$,那么说 S 是一个**凸集**. 特别如果 S 是一个凸集并且对任何 $\alpha \in S$,任何实数 $k \geqslant 0$ 都有 $k\alpha \in S$,那么说 S 是一个**凸锥**.

我们证明下面这个重要的投影原理:

定理 3.1.1 假定 L 是一个候补 Hilbert 空间,S 是 L 的一个完备的凸子集,$\alpha \in L$,那么存在唯一的 $\beta_0 \in S$,使

$$\|\alpha - \beta_0\| = \inf_{\beta \in S} \|\alpha - \beta\|, \tag{3.1.1}$$

其中 β_0 叫做 α 在 S 上的**投影**.

证明 由于 S 完备,S 是 L 的闭子集,所以至少存在一个 $\beta_0 \in S$,使(3.1.1)成立. 再证明 β_0 唯一. 假定 $\beta_0' \in S$ 也使(3.1.1)成立,由于

$$\begin{aligned}\|\beta_0 - \beta_0'\|^2 &= \|\beta_0 - \alpha + \alpha - \beta_0'\|^2 \\ &= \|\beta_0 - \alpha\|^2 + \|\alpha - \beta_0'\|^2 - 2(\alpha - \beta_0, \alpha - \beta_0'),\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&(\alpha-\beta_0, \alpha-\beta_0') \\ &\quad = \left(\alpha - \frac{\beta_0+\beta_0'}{2} - \frac{\beta_0-\beta_0'}{2},\ \alpha - \frac{\beta_0+\beta_0'}{2} + \frac{\beta_0-\beta_0'}{2}\right) \\ &\quad = \left\|\alpha - \frac{\beta_0+\beta_0'}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{\beta_0-\beta_0'}{2}\right\|^2,\end{aligned}$$

我们得到

$$\frac{1}{2}\|\beta_0-\beta_0'\|^2 = \|\alpha-\beta_0\|^2 + \|\alpha-\beta_0'\|^2 - 2\left\|\alpha - \frac{1}{2}(\beta_0+\beta_0')\right\|^2.$$

现在 S 是凸的，所以 $(\beta_0+\beta_0')/2\in S$. 因此

$$\frac{1}{2}\|\beta_0-\beta_0'\|^2$$

$$\leqslant\|\alpha-\beta_0\|^2+\|\alpha-\beta_0'\|^2-2\inf_{\beta\in S}\|\alpha-\beta\|^2=0.$$

由性质(2)知道 $\beta_0=\beta_0'$. ▎

定理 3.1.2 假定 L 是一个候补 Hilbert 空间，S 是 L 的一个完备的凸子集，$\alpha\in L$，那么 $\beta_0\in S$ 是 α 在 S 上的投影的充分而且必要的条件是

$$(\alpha-\beta_0,\ \beta-\beta_0)\leqslant 0,\quad \beta\in S. \tag{3.1.2}$$

特别，如果 S 是完备的凸子锥，那么(3.1.2)可表示为

$$(\alpha-\beta_0,\beta_0)=0,\quad (\alpha-\beta_0,\beta)\leqslant 0,\quad \beta\in S. \tag{3.1.3}$$

如果 S 是子 Hilbert 空间，那么(3.1.2)可表示为

$$(\alpha-\beta_0,\beta)=0,\quad \beta\in S. \tag{3.1.4}$$

证明 如果(3.1.2)成立，那么对任何 $\beta\in S$，

$$\begin{aligned}\|\alpha-\beta\|^2&=\|\alpha-\beta_0+\beta_0-\beta\|^2\\&=\|\alpha-\beta_0\|^2+\|\beta-\beta_0\|^2-2(\alpha-\beta_0,\beta-\beta_0)\\&\geqslant\|\alpha-\beta_0\|^2.\end{aligned}$$

因此，β_0 是 α 在 S 上的投影.

倒过来，如果 β_0 是 α 在 S 上的投影，那么对任何 $\beta\in S$，

$$\begin{aligned}\|\alpha-\beta_0\|^2&\leqslant\|\alpha-\beta\|^2\\&=\|\alpha-\beta_0\|^2+\|\beta-\beta_0\|^2-2(\alpha-\beta_0,\beta-\beta_0).\end{aligned}$$

因此，$2(\alpha-\beta_0,\beta-\beta_0)\leqslant\|\beta-\beta_0\|^2$. 对任何实数 $r\in(0,1)$，$r\beta+(1-r)\beta_0\in S$，因此把前面不等式中的 β 改作 $r\beta+(1-r)\beta_0$ 仍旧成立. 于是得到 $2(\alpha-\beta_0,\beta-\beta_0)\leqslant r\|\beta-\beta_0\|^2$. 令 $r\to 0$，得到(3.1.2).

特别，如果 S 是完备的凸子锥，那么取 $\beta=o\in S$，(3.1.2)就成了 $(\alpha-\beta_0,\beta_0)\geqslant 0$. 又把(3.1.2)中 β 改为 $(\beta+\beta_0)\in S$，那么就得到 $(\alpha-\beta_0,\beta)\leqslant 0$. 所以(3.1.3)成立. 倒过来，如果(3.1.3)成立，那么对任何 $\beta\in S$，

$$(\alpha-\beta_0,\beta-\beta_0)=(\alpha-\beta_0,\beta)-(\alpha-\beta_0,\beta_0)\leqslant 0,$$

也就是(3.1.2)成立.

再如果 S 是 Hilbert 空间,那么对任何 $\beta\in S$,$\beta+\beta_0$ 和 $-\beta+\beta_0$ 都属于 S,所以把(3.1.2)里的 β 先后改作 $\beta+\beta_0$ 和 $-\beta+\beta_0$,得到 $(\alpha-\beta_0,\beta)=0$,也就是(3.1.4).倒过来,如果(3.1.4)成立,那么把(3.1.4)里的 β 改作 $\beta-\beta_0\in S$,得到

$$(\alpha-\beta_0,\beta-\beta_0)=0,$$

所以(3.1.2)成立. ▌

由定理 3.1.2 我们看到,当 S 是子 Hilbert 空间时,$\alpha\in L$ 在 S 上的投影 β_0 拿(3.1.4)这样一个"正交"性质当特点,因此 β_0 也称作 α 在 S 上的**正交投影**.这是 n 维欧氏向量空间的性质的直接的推广.

习　题

1. 证明一个候补 Hilbert 空间 L 的完备化 $\overline{L}$ 是一个 Hilbert 空间,并且 $\overline{L}$ 上的内积是 L 上的内积的延拓.

2. 如果一个实线性空间 L 中每个元素 λ 有一个实数 $\|\lambda\|$ 对应,满足本节的性质(1),(2),(3),那么称 L 是一个**实线性赋范空间**或者**候补(实)Banach 空间**.证明:

(1) 对任何 $\lambda\in L$ 和 $\mu\in L$,把 $\|\lambda-\mu\|$ 规定为 λ 和 μ 的距离,那么 L 就成了一个尺度空间;

(2) 一个(实)Banach 空间 L 是一个实 Hilbert 空间的充分而且必要的条件是对任何 $\lambda\in L$ 和 $\mu\in L$,下式成立:

$$\|\lambda-\mu\|^2+\|\lambda+\mu\|^2=2\|\lambda\|^2+2\|\mu\|^2.$$

3. 假定 S 是 Hilbert 空间 L 的一个子 Hilbert 空间,那么 L 里跟 S 的所有元素正交的元素的全体 $S^{\perp}$ 是 L 的一个子 Hilbert 空间,叫做 S 的**正交余空间**.再证明 $L=S\oplus S$,即对任何 $\lambda\in L$,存在唯一的 $\lambda_1\in S$ 和 $\lambda_2\in S^{\perp}$ 使 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$.

§ 3.2 α 级位势及能量的符号

现在我们要证明可以利用能量对 $\boldsymbol{E}^n$ 上的一部分 Radon 测度定义内积. 先证明

引理 1(**M. Riesz 的组合公式**) 对 $\boldsymbol{E}^n$ 中任意两点 M 和 P,

$$r_{MP}^{\alpha+\beta-n} = (k(\alpha,\beta))^{-1}\int_{E^n} r_{MQ}^{\alpha-n} r_{QP}^{\beta-n} \mathrm{d}\tau(e_Q), \qquad (3.2.1)$$

其中 $0<\alpha<n, 0<\beta<n, 0<\alpha+\beta<n$, 而 $k(\alpha,\beta)$ 是一个与 M 及 P 无关的常数.

证明

$$\begin{aligned}\int_{E^n} r_{MQ}^{\alpha-n} r_{QP}^{\beta-n} \mathrm{d}\tau(e_Q) &= \int_0^\infty \int_{S(M,t)} r_{MQ}^{\alpha-n} r_{QP}^{\beta-n} \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \int t^{\alpha-n} r_{QP}^{\beta-n} \sigma_{n-1} t^{n-1} \mathrm{d}\varepsilon_{M,t} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \int t^{\alpha-1} (t^2 + r_{MP}^2 - 2t r_{MP} \cos\theta)^{\frac{\beta-n}{2}} \sigma_{n-1} \mathrm{d}\varepsilon_{M,t} \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

这里 θ 表示 $\overrightarrow{MP}$ 和 $\overrightarrow{MQ}$ 的交角. 令 $\rho = t/r_{MP}$, 得到

$$\begin{aligned}&\int_{E^n} r_{MQ}^{\alpha-n} r_{QP}^{\beta-n} \mathrm{d}\tau(e_Q) \\ &\quad = r_{MP}^{\alpha+\beta-n} \sigma_{n-1} \int_0^\infty \rho^{\alpha-1} \mathrm{d}\rho \int (1 - \rho^2 - 2\rho\cos\theta)^{\frac{\beta-n}{2}} \mathrm{d}\varepsilon_{M,t} \\ &\quad = r_{MP}^{\alpha+\beta-n} \sigma_{n-1} \int_0^\infty \rho^{\alpha-1} \mathrm{d}\rho \int (1 + \rho^2 - 2x^1)^{\frac{\beta-n}{2}} \mathrm{d}\varepsilon_{O,\rho}(e_{Q'}),\end{aligned}$$

这里 x^1 表示变动点 Q' 的第一个直角坐标. 等式最后这个二重积分跟 M 及 P 都无关, 只决定于 α 及 β, 因此得到(3.2.1). ▌

下面, 对 $\boldsymbol{E}^n$ 上的任意一个 Radon 测度 μ, $0<\alpha<n$, 令

$$U_{(\alpha)}^{\mu}(P) = \int r_{PQ}^{\alpha-n} \mathrm{d}\mu(e_Q).$$

$U_{(\alpha)}^{\mu}(P)$ 叫做 μ 的 **α 级位势**, 或叫 **M. Riesz 位势**. 又对 $\boldsymbol{E}^n$ 上任何两个 Radon 测度 λ 及 μ, 令

$$(\lambda,\mu)_{(\alpha)}=\int U^{\lambda}_{(\alpha)}\mathrm{d}\mu=\int U^{\mu}_{(\alpha)}\mathrm{d}\lambda=(\mu,\lambda)_{(\alpha)}.$$

$(\lambda,\mu)_{(\alpha)}$叫做 λ 及 μ 的 **α 级相互能量**. 特别当 $n>2$ 且 $\alpha=2$ 的时候,2 级位势就是 Newton 位势.

引理 2 假定 λ 及 μ 是 $\boldsymbol{E}^n(n\geqslant 2)$上两个正 Radon 测度,那么对任何 $\alpha\in(0,n)$,

$$(\lambda,\mu)_{(\alpha)}\leqslant\sqrt{(\lambda,\lambda)_{(\alpha)}(\mu,\mu)_{(\alpha)}}.$$

证明 由定义,

$$(\lambda,\mu)_{(\alpha)}=\int U^{\lambda}_{(\alpha)}\mathrm{d}\mu=\iint r^{\alpha-n}_{MP}\mathrm{d}\lambda(e_M)\mathrm{d}\mu(e_P).$$

由(3.2.1)得到

$$\begin{aligned}k\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right)(\lambda,\mu)_{(\alpha)}&=\iint\int_{E^n}r^{\frac{\alpha}{2}-n}_{MQ}r^{\frac{\alpha}{2}-n}_{QP}\mathrm{d}\tau_Q\mathrm{d}\lambda(e_M)\mathrm{d}\mu(e_P)\\&=\int_{E^n}\left\{\int r^{\frac{\alpha}{2}-n}_{MQ}\mathrm{d}\lambda(e_M)\right\}\left\{\int r^{\frac{\alpha}{2}-n}_{QP}\mathrm{d}\mu(e_P)\right\}\mathrm{d}\tau_Q.\end{aligned}$$

由 Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned}&(k(\alpha/2,\alpha/2))^2\cdot(\lambda,\mu)^2_{(\alpha)}\\&\quad\leqslant\int_{E^n}\left\{\int r^{\alpha/2-n}_{MQ}\mathrm{d}\lambda(e_M)\right\}^2\mathrm{d}\tau_Q\cdot\int_{E^n}\left\{\int r^{\alpha/2-n}_{QP}\mathrm{d}\mu(e_P)\right\}^2\mathrm{d}\tau_Q.\end{aligned}$$

由(3.2.1)这不等式右边第一个因子是

$$\begin{aligned}&\int_{E^n}\iint r^{\alpha/2-n}_{MQ}r^{\alpha/2-n}_{M'Q}\mathrm{d}\lambda(e_M)\mathrm{d}\lambda(e_{M'})\mathrm{d}\tau_Q\\&\quad=k(\alpha/2,\alpha/2)\iint r^{\alpha-n}_{MM'}\mathrm{d}\lambda(e_M)\mathrm{d}\lambda(e_{M'})\\&\quad=k(\alpha/2,\alpha/2)(\lambda,\lambda)_{(\alpha)}.\end{aligned}$$

同样,第二个因子就是 $k(\alpha/2,\alpha/2)(\mu,\mu)_{(\alpha)}$. ▌

引理 3 当 $n\geqslant 2$ 时,$\boldsymbol{E}^n$ 上任何一个 Radon 测度 μ 的 α 级能量 $(\mu,\mu)_{(\alpha)}\geqslant 0$,其中 $\alpha\in(0,n)$,除非$(\mu,\mu)_{(\alpha)}$不确定.

证明 如果$(\mu,\mu)_{(\alpha)}$不是不确定的,那么由引理 2,

$$\begin{aligned}(\mu,\mu)_{(\alpha)} &= \int (U^{\mu_+}_{(\alpha)} - U^{\mu_-}_{(\alpha)}) \mathrm{d}(\mu_+ - \mu_-) \\ &= (\mu_+,\mu_+)_{(\alpha)} + (\mu_-,\mu_-)_{(\alpha)} - 2(\mu_+,\mu_-)_{(\alpha)} \\ &\geqslant (\mu_+,\mu_+)_{(\alpha)} + (\mu_-,\mu_-)_{(\alpha)} - 2\sqrt{(\mu_+,\mu_+)_{(\alpha)}(\mu_-,\mu_-)_{(\alpha)}} \\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$ ▌

引理 4 当 $n \geqslant 2$ 时，E^n 上任何两个测度 λ,μ 满足下列不等式：

$$(\lambda,\mu)^2_{(\alpha)} \leqslant (\lambda,\lambda)_{(\alpha)}(\mu,\mu)_{(\alpha)}, \tag{3.2.2}$$

其中 $0<\alpha<n$，除非 λ 和 μ 的一个实系数线性组合的 α 级能量是不确定的.

证明 对任何两个实数 a 及 b，

$$\begin{aligned}0 &\leqslant (a\lambda + b\mu,\ a\lambda + b\mu)_{(\alpha)} \\ &= a^2(\lambda,\lambda)_{(\alpha)} + b^2(\mu,\mu)_{(\alpha)} + 2ab(\lambda,\mu)_{(\alpha)}.\end{aligned}$$

如果 $(\lambda,\lambda)_{(\alpha)}(\mu,\mu)_{(\alpha)} > 0$，取 $a = \sqrt{(\mu,\mu)_{(\alpha)}}$，$b = \sqrt{(\lambda,\lambda)_{(\alpha)}}$ 或 $-\sqrt{(\lambda,\lambda)_{(\alpha)}}$，这里正负号看$(\lambda,\mu)_{(\alpha)} < 0$ 或 $\geqslant 0$ 而定. 那么得到

$$2\sqrt{(\lambda,\lambda)_{(\alpha)}(\mu,\mu)_{(\alpha)}}\,|(\lambda,\mu)_{(\alpha)}| \leqslant 2(\lambda,\lambda)_{(\alpha)}(\mu,\mu)_{(\alpha)}.$$

所以(3.2.2)成立.

如果 $(\lambda,\lambda)_{(\alpha)} = (\mu,\mu)_{(\alpha)} = 0$，那么取 $a=1, b=-1$，得到 $(\lambda,\mu)_{(\alpha)} \leqslant 0$. 若取 $a=1, b=1$，得到$(\lambda,\mu)_{(\alpha)} \geqslant 0$. 因此$(\lambda,\mu)_{(\alpha)}=0$，所以(3.2.2)成立.

如果 $(\lambda,\lambda)_{(\alpha)} = 0$，$(\mu,\mu)_{(\alpha)} > 0$，那么取 $a = \sqrt{(\mu,\mu)_{(\alpha)}}$，$b = -(\lambda,\mu)_{(\alpha)} \Big/ \sqrt{(\mu,\mu)_{(\alpha)}}$，于是得到

$$0 \leqslant (\lambda,\mu)^2_{(\alpha)} - 2(\lambda,\mu)^2_{(\alpha)} = -(\lambda,\mu)^2_{(\alpha)},$$

所以$(\lambda,\mu)_{(\alpha)}=0$，(3.2.2)成立. ▌

引理 5 当 $n>2$ 时，E^n 上任何一个测度 μ 的能量$(\mu,\mu)_{E^n} \geqslant 0$，除了$(\mu,\mu)_{E^n}$不确定以外. 如果$(\mu,\mu)_{E^n}=0$，那么 $\mu=o$.

证明 引理前半部分就是引理 3，现在证明引理的后半部分. 如果 $(\mu,\mu)_{E^n}=0$，那么由引理 4，对任何 $P\in E^n$，和正数 a，$(\mu,\varepsilon_{P,a})_{E^n}^2\leqslant(\mu,\mu)_{E^n}(\varepsilon_{P,a},\varepsilon_{P,a})_{E^n}=0$. 因此，

$$0=(\mu,\varepsilon_{P,a})_{E^n}=\int U^{\varepsilon_{P,a}}\mathrm{d}\mu=\int r_{aPQ}^{2-n}\mathrm{d}\mu,$$

其中 r_{aPQ} 见定理 2.2.2 的证明，不过把其中的 c 改为 a. 因此

$$U^{\mu}(P)=\int r_{PQ}^{2-n}\mathrm{d}\mu(e_Q)=\lim_{a\to0}\int r_{aPQ}^{2-n}\mathrm{d}\mu=0.$$

因此 $\mu=0$. ▌

引理 6 当 $n>2$ 时，E^n 上的能量有限的 Radon 测度全体，用相互(Newton)能量作内积，构成一个候补 Hilbert 空间.

证明显然. $n=2$ 的情形需要另外考虑. 首先注意，对任何一个正数 r，

$$\lim_{0<a\to0}\frac{r^{-a}-1}{a}=-\log_e r$$

成立，并且随着充分小的正变数 a 减小，$\dfrac{r^{-a}-1}{a}$ 也单调减小. 因此对 E^2 上任意两个 Radon 测度 μ,ν，只要 $(\mu,\nu)_{E^2}$ 确定，就有

$$(\mu,\nu)_{E^2}=\lim_{0<a\to0}\iint\frac{r_{PQ}^{-a}-1}{a}\mathrm{d}\mu(e_P)\mathrm{d}\nu(e_Q).$$

特别，当 $\mu(E^2)=\nu(E^2)=0$ 时，

$$(\mu,\nu)_{E^2}=\lim_{0<a\to0}\frac{1}{a}(\mu,\nu)_{(2-a)}.$$

由引理 2～引理 4，再经过与引理 5 的证明相类似的推理，可以得到

引理 7 E^2 上总质量等于 0 的能量有限的 Radon 测度全体，用相互对数能量 $(\mu,\nu)_{E^2}$ 作内积，构成一个候补 Hilbert 空间.

引理 7 使我们想起相对于开球 $K(O,R)$ 的 Green 位势. 由 §2.7 知道，假定 μ 是一个相对于 $K(O,R)$ 的总质量有限的 Radon 测度，那么 $U^{\mu}_{K(O,R)}=U^{\mu-\mu'}_{n}$，这里 $\mu-\mu'$ 是总质量等于 0 的

Radon 测度. 此外，假定 μ 和 ν 是两个总质量有限的相对于 $K(O,R)$ 的 Radon 测度，那么由于 G 在 $S(O,R)$ 上等于 0，知道 $U^{\mu'}_{K(O,R)}=0$. 因此它们的相互 Green 能量

$$(\mu,\nu)_{K(O,R)} \triangleq \int U^{\mu}_{K(O,R)}\mathrm{d}\nu = \int U^{\mu-\mu'}_{K(O,R)}\mathrm{d}\nu$$

$$= \int U^{\nu}_{K(O,R)}\mathrm{d}(\mu-\mu') = \int U^{\nu-\nu'}_{n}\mathrm{d}(\mu-\mu')$$

$$= (\mu-\mu',\nu-\nu')_{E^n}.$$

由引理 7，当 $n=2$ 的时候，相对于 $K(O,R)$ 的总质量有限并且 Green 能量也有限的 Randon 测度全体，用相互 Green 能量作内积，构成一个候补 Hilbert 空间. 至于 $n>2$ 的时候，同样的事实当然成立了，并且总质量有限的假设都可以去掉，R 也可以等于 $+\infty$. 这样，我们就得到

定理 3.2.1 当 $n\geqslant 2$ 时，相对于 E^n 的开子球 $K(O,R)$ 的 Green 能量有限的 Radon 测度全体，用相互 Green 能量作内积，构成一个候补 Hilbert 空间 $\mathscr{E}$. 当 $n>2$ 时，允许 $R=+\infty$；当 $n=2$ 时，限制 $R<\infty$，并且假定所说的测度总质量有限.

§3.3 强收敛、弱收敛及浑收敛

上一节说明了 $\mathscr{E}$ 是候补 Hilbert 空间. 我们把在这候补 Hilbert 空间的拓扑下的收敛称作**强收敛**. 换句话说，如果 $\{\mu_m\}\subseteq\mathscr{E}$，$\mu\in\mathscr{E}$，

$$\|\mu_m-\mu\|_{K(O,R)} \triangleq \sqrt{(\mu_m-\mu,\mu_m-\mu)_{K(O,R)}} \to 0,\quad m\to\infty,$$

那么说 $\{\mu_m\}$ 强收敛于 μ.

为了简便，以后常用 (μ,ν) 表示相互能量. 假定 μ,ν 是 E^n 上的 Radon 测度，那么 (μ,ν) 表示 $(\mu,\nu)_{E^n}$；假定 μ,ν 是相对于 $K(O,R)$ 的 Radon 测度，那么 (μ,ν) 就表示 $(\mu,\nu)_{K(O,R)}$.

下面要详细讨论 E^n 上的 Radon 测度的强收敛及浑收敛之间

的关系.为了这个目的,先证明

引理 1(**H. Cartan**) 当 $n\geqslant 2$ 时,用 ε_{P_k,r_k} 表示以 E^n 的有理点为中心、以正有理数为半径的球面上的均匀单位质量分布,那么它们的常系数线性组合 $\sum_{k=1}^{m} c_k\varepsilon_{P_k,r_k}$ 的位势全体在 $\mathscr{K}_0$ 中稠密,这里 m 有限.换句话说,假定 f 是 E^n 里的一个支柱紧致的连续函数,那么存在一列 $\{\varphi_j\}$ 一致收敛于 f,其中每个 φ_j 是上面所说的那种位势.

证明 随便取一个正数 ε,存在一个正数 δ,使对距离小于 δ 的任何两点 P 及 Q,都有 $|f(P)-f(Q)|<\varepsilon$.再取两个正有理数 r 及 t,使 $0<r<t<\delta$,那么 $\varepsilon_{P,t}-\varepsilon_{P,r}$ 的位势支柱是 $K(P,\delta)$ 的子集.令

$$\frac{1}{c}=\int_{E^n} U_n^{\varepsilon_{P,t}-\varepsilon_{P,r}}\mathrm{d}\tau,$$

$$g(P)=\int_{E^n} U_n^{c(\varepsilon_{P,t}-\varepsilon_{P,r})}(Q)f(Q)\mathrm{d}\tau(e_Q),$$

那么

$$|f(P)-g(P)|\leqslant\varepsilon.$$

把 f 的支柱分作有限个直径充分小的两两不相交的 (B) 集 A_j,使对每个 A_j 的任何两点 Q 及 Q',满足

$$\left|U_n^{c(\varepsilon_{P,t}-\varepsilon_{P,r})}(Q')-U_n^{c(\varepsilon_{P,t}-\varepsilon_{P,r})}(Q)\right|\leqslant\varepsilon.$$

那么由积分的定义,存在一组 $P_j\in A_j$,使对任何 $P\in E^n$,

$$\left|g(P)-\sum_j U_n^{c(\varepsilon_{P,t}-\varepsilon_{P,r})}(P_j)\int_{A_j} f\mathrm{d}\tau\right|\leqslant\varepsilon\int_{E^n}|f|\mathrm{d}\tau.$$

注意 $U_n^{\varepsilon_{P,r}}(Q)=U_n^{\varepsilon_{Q,r}}(P)$,并且令 $\int_{A_j} f\mathrm{d}\tau=\frac{1}{c}c_j$,就得到

$$\left|f(P)-\sum_j U_n^{c_j(\varepsilon_{P_j,t}-\varepsilon_{P_j,r})}(P)\right|\leqslant\varepsilon\left(1+\int|f|\mathrm{d}\tau\right). \quad \blacksquare$$

由引理 1 得到

引理 2 假定 $\{\mu_m\}$ 是 E^n 上一列 Radon 测度,$n\geqslant 2$,μ 是 E^n 上一个 Radon 测度.如果对任意有理点 $P\in E^n$ 及任何正有理数 r,下

式成立：

$$(\mu_m,\varepsilon_{P,r})_{E^n}-(\mu,\varepsilon_{P,r})_{E^n}\to 0,\quad m\to\infty,$$

那么$\{\mu_m\}$浑收敛于μ，或者说相对于$\boldsymbol{E}^n$浑收敛于μ.

证明 对任何一个$f\in\mathscr{K}_0$和任何一个正数ε，存在引理1里所说的那种位势φ使对任何$P\in\boldsymbol{E}^n$，$|f(P)-\varphi(P)|<\varepsilon$成立. 又由引理2的假设知道

$$\int\varphi\,\mathrm{d}\mu_m\to\int\varphi\,\mathrm{d}\mu,\quad m\to\infty.$$

把f的支柱记作S，那么

$$\begin{aligned}\left|\int f\,\mathrm{d}\mu_m-\int f\,\mathrm{d}\mu\right|&=\left|\int_S f\,\mathrm{d}(\mu_m-\mu)\right|\\&\leqslant\left|\int_S(f-\varphi)\mathrm{d}(\mu_m-\mu)\right|+\left|\int_S\varphi\,\mathrm{d}(\mu_m-\mu)\right|\\&\leqslant\varepsilon|\mu_m-\mu|(S)+o(1),\quad m\to\infty.\end{aligned}$$

由引理2的假设，再经过与§1.7引理3的证明相类似的推理步骤，知道$|\mu_m|(S)$有界，因此知道当ε充分小的时候，$\varepsilon|\mu_m-\mu|(S)$可小于任意指定的正数. 因此得到

$$\left|\int f\mathrm{d}\mu_m-\int f\mathrm{d}\mu\right|\to 0,\quad m\to\infty.\quad\blacksquare$$

引理2包括了$\boldsymbol{E}^2$上对数位势的情况. 另外一方面，对Green位势有类似的结论. 我们注意如果把引理1中的$\boldsymbol{E}^n$换作$\boldsymbol{E}^n$的开子球$K(O,R)$，可以得到类似的结论. 因此跟引理2类似可以得到

引理3（**H. Cartan**） 假定$\{\mu_m\}$是一列相对于$K(O,R)$的Radon测度，μ是一个相对于$K(O,R)$的Radon测度. 如果对$K(O,R)$的任何一个闭子球$K(P,r)$，这里P是任何有理点，r是任何正有理数，当$m\to\infty$时，$(\mu_m,\varepsilon_{P,r})_{K(O,R)}-(\mu,\varepsilon_{P,r})_{K(O,R)}\to 0$，那么$\{\mu_m\}$浑收敛于$\mu$，或者说相对于$K(O,R)$浑收敛于$\mu$（就是把$K(O,R)$看作§1.7所考虑的局部紧致的空间）. $\blacksquare$

我们再定义另一种收敛概念.

假定$\{\mu_m\}\subset\mathscr{E}$，$\{\|\mu_m\|\}$有界，$\mu\in\mathscr{E}$，对任何$\lambda\in\mathscr{E}$，

$$(\mu_m,\lambda)\to(\mu,\lambda),\quad m\to\infty$$

成立，那么说$\{\mu_m\}$**弱收敛**于μ.

由引理3知道如果$\{\mu_m\}$弱收敛于μ，那么$\{\mu_m\}$一定浑收敛于μ. 另外，如果$\{\mu_m\}$强收敛于μ，那么$\{\mu_m\}$一定弱收敛于μ，因为对任何$\lambda\in\mathscr{E}$，

$$|(\mu_m-\mu,\lambda)|\leqslant\|\mu_m-\mu\|\,\|\lambda\|\to 0,\quad m\to\infty.$$

所以强收敛强于弱收敛，弱收敛又强于浑收敛. 现在要说明在什么情况下，这三种收敛的概念等价.

定理 3.3.1 $\mathscr{E}$的子列$\{\mu_m\}$强收敛的充分而且必要的条件是$\{\mu_m\}$弱收敛并且是Cauchy列.

证明 只要证明充分性就够了. 假定$\{\mu_m\}$弱收敛于μ，那么对每个μ_p，$\{\mu_m-\mu_p\}$弱收敛于$\mu-\mu_p$，因此

$$\begin{aligned}\|\mu-\mu_p\|^2&=\lim_{m\to\infty}(\mu_m-\mu_p,\mu-\mu_p)\\&=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\mu_m-\mu_p,\mu_n-\mu_p)\\&\leqslant\overline{\lim_{m\to\infty}}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\|\mu_m-\mu_p\|\,\|\mu_n-\mu_p\|.\end{aligned}$$

假定$\{\mu_m\}$是Cauchy列，那么对任何正数ε，可以选择p充分大，使当$m>p$时，$\|\mu_m-\mu_p\|<\varepsilon$. 所以上面不等式右边$<\varepsilon^2$. 因此当$p$充分大的时候，$\|\mu-\mu_p\|^2<\varepsilon^2$. 所以$\mu_p$强收敛于$\mu$. ▌

为了了解在什么情况下由浑收敛可以推出弱收敛，先证明下面的引理.

引理 4 假定μ和ν是两个相对于$K(O,R)$的正Radon测度，$U^{\mu}_{K(O,R)}\leqslant U^{\nu}_{K(O,R)}$处处成立，那么$\|\mu\|\leqslant\|\nu\|$.

证明 $\int U^{\mu}\mathrm{d}\mu\leqslant\int U^{\nu}\mathrm{d}\mu=\int U^{\mu}\mathrm{d}\nu\leqslant\int U^{\nu}\mathrm{d}\nu.$ ▌

把属于$\mathscr{E}$的正测度全体记作$\mathscr{E}^+$.

引理 5 假定$\{\mu_m\}\subseteq\mathscr{E}^+$，$\mu\in\mathscr{E}^-$，$\{U^{\mu_m}\}$关于$m$单调，当$m\to\infty$时，$U^{\mu_m}\to U^{\mu}$，那么$\{\mu_m\}$强收敛于$\mu$.

证明 由引理4，$\{\|\mu_m\|\}$是一个有界单调数列，因此是

Cauchy 列. 于是$\{\mu_m\}$也是一个 Cauchy 列，因为假定$U^{\mu_n}\geqslant U^{\mu_m}$，那么

$$\|\mu_m-\mu_n\|^2=\|\mu_m\|^2+\|\mu_n\|^2-2\int U^{\mu_n}\mathrm{d}\mu_m$$

$$\leqslant\|\mu_m\|^2+\|\mu_n\|^2-2\|\mu_m\|^2=\|\mu_n\|^2-\|\mu_m\|^2.$$

这样，只要证明$\{\mu_m\}$弱收敛于μ就行了. 这很明显，因为由 Lebesgue 收敛定理，对任何$\lambda\in\mathscr{E}^+$，

$$\lim_{m\to\infty}(\mu_m,\lambda)=\lim_{m\to\infty}\int U^{\mu_m}\mathrm{d}\lambda=\int U^{\mu}\mathrm{d}\lambda=(\mu,\lambda).\quad\blacksquare$$

由引理 5，任何一个$\mu\in\mathscr{E}^+$是$\mu|\overline{K(O,r)}$当$r\to R$时的强极限. 不但这样，利用 § 2.6 引理 1 的记号，

$$U^{\mu|\overline{K(O,r)}}(P)=\lim_{\rho\to 0}U_\rho^{\mu|\overline{K(O,r)}},$$

而$U_\rho^{\mu|\overline{K(O,r)}}$是连续的上调和函数，并且不超过$U^{\mu|\overline{K(O,r)}}$. 因此由 § 2.7 推论 1，它也是一个位势. 因此，$U^{\mu|\overline{K(O,r)}}$又是一列连续位势$U^\nu$的强极限，这种连续位势的测度属于$\mathscr{E}^+$并且支柱紧致.

如果对上面所说的这种连续位势U^ν定义$u_m=\inf(U^\nu,1/m)$，那么$U^\nu-u_m$除了一个$K(O,r)$的一个紧致子集以外等于 0，并且是连续的位势，它的质量分布属于$\mathscr{E}$，且支柱紧致.

于是得到

引理 6 在$\mathscr{E}$中，在强收敛的拓扑下，位势属于$\mathscr{K}_0$(即连续且支柱是$K(O,R)$的紧致子集)的测度全体处处稠密.

定理 3.3.2 假定$\{\mu_m\}\subseteq\mathscr{E}^+$，$\|\mu_m\|$有界，$\{\mu_m\}$相对于$K(O,R)$浑收敛于测度$\mu$，那么$\mu\in\mathscr{E}^+$并且$\{\mu_m\}$弱收敛于$\mu$.

证明 假定$\|\mu_m\|<M$. 由于U^{μ_m}下半连续并且非负，所以是(B)可测，所以由 Fatou 引理(定理 1.2.10)，

$$\int U^{\mu}\mathrm{d}\mu\leqslant\varliminf_{p\to\infty}\int U^{\mu_p}\mathrm{d}\mu=\varliminf_{p\to\infty}\int U^{\mu}\mathrm{d}\mu_p$$

$$\leqslant\varliminf_{p\to\infty}\varliminf_{q\to\infty}\int U^{\mu_q}\mathrm{d}\mu_p$$

$$\leqslant \varliminf_{p\to\infty} \varliminf_{q\to\infty} \| \mu_q \| \ \| \mu_p \| < M^2.$$

因此 $\int U^\mu \mathrm{d}\mu$ 存在，所以 $\mu \in \mathscr{E}^+$.

因为 $\{\mu_m\}$ 浑收敛于 μ，所以当 $\nu \in \mathscr{E}$ 并且 $U^\nu \in \mathscr{K}_0$ 时，

$$\lim_{m\to\infty} (\nu, \mu_m) = \lim_{m\to\infty} \int U^\nu \mathrm{d}\mu_m = \int U^\nu \mathrm{d}\mu = (\nu, \mu).$$

由引理 6，这种 ν 在 $\mathscr{E}$ 中处处稠密. 所以对任何 $\lambda \in \mathscr{E}$，$(\lambda, \mu_m) \to (\lambda, \mu)$ 成立. 这说明 $\{\mu_m\}$ 弱收敛于 μ. ▎

定理 3.3.3 $\mathscr{E}^+$ 是 $\mathscr{E}$ 的完备的凸子锥.

证明 由定理 3.3.1 及定理 3.3.2，只要证明任何一个 Cauchy 列 $\{\mu_m\} \subseteq \mathscr{E}^+$ 浑收敛于一个测度 $\mu \in \mathscr{E}^+$ 就行了. 事实上，对任何 $P \in \boldsymbol{E}^n$ 及正数 r，

$$|((\mu_m - \mu_n), \varepsilon_{P,r})| \leqslant \| \varepsilon_{P,r} \| \ \| \mu_m - \mu_n \|.$$

$\{\mu_m\}$ 是 Cauchy 列，所以由这不等式知道对任何 $\varepsilon_{P,r}$，都有 $(\mu_m, \varepsilon_{P,r})$ 收敛. 因此由引理 3 的证明，对任何 $f \in \mathscr{K}_0$，$\int f \, \mathrm{d}\mu_m$ 收敛. 由定理 1.7.1，$\{\mu_m\}$ 浑收敛于某 $\mu \in \mathscr{E}^+$. ▎

定理 3.3.4 $\mathscr{E}$ 不完备，因此它不是一个 Hilbert 空间.

证明 为了简明，我们只考虑 $n>2$ 并且 $R=\infty$ 的情况. 令 $\mu_m = \sum_{k=1}^{m} (\varepsilon_{O,1-4^{-k}} - \varepsilon_{O,1})$，我们看到

$$\begin{aligned}
&\| \varepsilon_{O,1-4^{-k}} - \varepsilon_{O,1} \|_{E^n}^2 \\
&\quad = \| \varepsilon_{O,1-4^{-k}} \|_{E^n}^2 + \| \varepsilon_{O,1} \|_{E^n}^2 - 2(\varepsilon_{O,1-4^{-k}}, \varepsilon_{O,1})_{E^n} \\
&\quad = (1-4^{-k})^{2-n} + 1 - 2 = (1-4^{-k})^{2-n}(1-(1-4^{-k})^{n-2}) \\
&\quad \leqslant c^2 4^{-k},
\end{aligned}$$

这里 c 是跟 k 无关的正数. 因此，当 $n>m\to\infty$ 时，

$$\| \mu_n - \mu_m \|_{E^n} \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} c 2^{-k} = c(2^{-m} - 2^{-n}) \to 0.$$

所以 $\{\mu_m\}$ 是一个 Cauchy 列. 但是在 $\boldsymbol{E}^n$ 的闭单位球中，$\{\mu_m\}$ 无界，所以由定理 1.7.4，$\{\mu_m\}$ 不浑收敛，因此由本节的定理 3.3.1 及

3.3.2，$\{\mu_m\}$不强收敛.

这例子就说明了 $\mathscr{E}$ 不是 Hilbert 空间. ▌

假定 K 是 E^n 的子开球 $K(O,R)$的一个相对闭集，我们把支柱包含在 K 里的那些属于 $\mathscr{E}$ 的测度全体记作 $\mathscr{E}_K$，属于 $\mathscr{E}_K$ 的正测度全体记作 $\mathscr{E}_K^+$. 由 $\mathscr{E}^+$ 的完备性得到

推论 1 $\mathscr{E}_K^+$ 是 $\mathscr{E}$ 的完备凸子锥.

证明 $\mathscr{E}_K^+$ 显然是一个凸锥. 现在假定$\{\mu_m\}$是 $\mathscr{E}_K^+$ 的一个 Cauchy 列，那么$\{\mu_m\}$强收敛于一个测度 $\mu\in\mathscr{E}^+$. 由于$\{\mu_m\}$也必须浑收敛于 μ，μ 的支柱当然包含在 K 里. 因此 $\mu\in\mathscr{E}_K^+$. 这证明了 $\mathscr{E}_K^+$ 的完备性. ▌

以上研究了 $\mathscr{E}$ 的强拓扑及 $\mathscr{E}^+$ 的完备性. 讨论的过程是在预先定好一个开球的前提下进行的. 但是应该注意，这种强拓扑又有不依赖于这个预先定好的开球的一面. 下面我们来说明这个事实.

假定 K 是 E^n 的一个紧致子集，$n\geqslant 2$，那么对任何一个开球 $K(O,R)\supset K$，可以得到测度族 $\mathscr{E}_K$ 及 $\mathscr{E}_K^+$. 我们可以证明，$\mathscr{E}_K$ 及 $\mathscr{E}_K^+$ 作为测度族，跟开球 $K(O,R)$的选择无关.

事实上，假定 Radon 测度 μ 的支柱包含在 K 里，由 §2.7

$$(\mu,\mu)_{K(O,R)} = (\mu-\mu',\mu)_{E^n}$$
$$= (\mu,\mu)_{E^n} - (\mu',\mu)_{E^n},$$

这里 μ'是一个支柱包含在 $S(O,R)$里的测度. 所以 $U_n^{\mu'}$ 在 K 里调和，因此有界且$(\mu',\mu)_{E^n}$总是有限的. 因此上面这个等式说明$(\mu,\mu)_{K(O,R)}$有限的充分而且必要的条件是$(\mu,\mu)_{E^n}$有限. 也就是说，$\mu\in\mathscr{E}_K$ 的充分而且必要的条件是$(\mu,\mu)_{E^n}$有限. 所以对不同的 $K(O,R)\supset K$，所得到的 $\mathscr{E}_K$ 实际上是相同的测度族.

但是对于 $\mathscr{E}_K$ 中测度 μ，针对不同的 $K(O,R)$，$\|\mu\|_{K(O,R)}$却是不同的. 因此，在 $\mathscr{E}_K$ 中可以有相对于 $K(O,R_1)$的强收敛，相对于 $K(O,R_2)$的强收敛，以至相对于 E^n 的强收敛. 尽管如此，相对于不同的开球 $K(O,R)\supset K$，所得到的 $\mathscr{E}_K$ 的强拓扑却是互相等价的，下面说明这一点.

先假定 $n>2$. 假定 μ 是 $\mathscr{E}_K$ 中相对于 $K(O,R)$强收敛于 o 的一个变动的测度，那么 μ 浑收敛于 o. 因此由 § 2.7 中 μ'的定义知道 μ' 也浑收敛于 o,因此 $\mu\times\mu'$ 也浑收敛于 o. 于是

$$(\mu',\mu)_{E^n}=\int_K\int_{S(O,R)} r_{PQ}^{2-n}\mathrm{d}\mu'(e_P)\mathrm{d}\mu(e_Q)\to 0,$$

这是因为 K 和 $S(O,R)$的距离大于 0，于是 r_{PQ}^{2-n} 在紧致集 $K\times S(O,R)$里连续. 因此，由

$$(\mu,\mu)_{K(O,R)}=(\mu,\mu)_{E^n}-(\mu',\mu)_{E^n}$$

知道$(\mu,\mu)_{E^n}\to 0$.

反过来，假定$(\mu,\mu)_{E^n}\to 0$，那么同样 μ 浑收敛于 o. 于是跟前边一样得到$(\mu',\mu)_{E^n}\to 0$. 因此由上面的等式知道$(\mu,\mu)_{K(O,R)}\to 0$，也就是 μ 相对于 $K(O,R)$强收敛于 o.

所以当 $n>2$ 时，一个变动的测度 $\mu\in\mathscr{E}_K$ 相对于 $K(O,R)$强收敛于 o 的充分而且必要的条件是相对于 E^n 强收敛于 o. 由于一个变动的测度 $\nu\in\mathscr{E}_K$ 强收敛于一个测度 ν_0 的充分而且必要的条件是 $\nu-\nu_0$ 强收敛于 o. 因此，$\nu\in\mathscr{E}_K$ 相对于 $K(O,R)$强收敛于 ν_0 的充分而且必要的条件是它相对于 E^n 强收敛于 ν_0. 这表明当 $n>2$ 时，$\mathscr{E}_K$ 相对于 $K(O,R)$的强拓扑跟它相对于 E^n 的强拓扑等价，因此与 $K(O,R)$的选择无关.

再谈 $n=2$ 的情形. 为了方便，我们利用一种改良的对数位势的概念. 假定 μ 是 E^2 上的一个总质量有限的 Radon 测度，$O\in E^2$，R 是一个正数，那么我们把

$$\begin{aligned}U_2^{*\mu}(P)&=\int\log_e\frac{2R}{r_{PQ}}\mathrm{d}\mu(e_Q)\\&=U_2^{\mu-\mu(E^2)\varepsilon_{O,2R}}(P)\\&=\mu(E^2)\log_e 2R+U_2^{\mu}(P)\end{aligned}$$

称作 μ 的**改良的对数位势**. 两个 Radon 测度 μ 和 ν 的**改良的对数相互能量**是

$$
\begin{aligned}
(\mu,\nu)^*_{E^2} &= \iint \log_e \frac{2R}{r_{PQ}} \mathrm{d}\mu(e_P)\mathrm{d}\nu(e_Q) \\
&= (\mu - \mu(E^2)\varepsilon_{O,2R}, \nu)_{E^2} \\
&= (\mu - \mu(E^2)\varepsilon_{O,2R}, \nu - \nu(E^2)\varepsilon_{O,2R})_{E^2}.
\end{aligned}
$$

现在考虑 E^2 的紧致子集 K 及开球 $K(O,R)\supset K$，相对于 $K(O,R)$ 我们得到测度族 $\mathscr{E}_K$. 由于 $\mu\in\mathscr{E}_K$ 的充分而且必要的条件是 $(\mu,\mu)_{E^2}$ 有限，因此 $\mu\in\mathscr{E}_K$ 的充分而且必要的条件也是 $(\mu,\mu)^*_{E^2}$ 有限. 此外，由于对任何 $\mu\in\mathscr{E}_K$，$\mu-\mu(E^2)\varepsilon_{O,2R}$ 的总质量是 0，$\mathscr{E}_K$ 的任何两个元素如果用 $(\mu,\nu)^*_{E^2}$ 当内积也成为一个候补 Hilbert 空间. 由这内积得到的范数是 $\|\mu\|^*_{E^2}=\sqrt{(\mu,\mu)^*_{E^2}}$.

我们证明 $\mathscr{E}_K$ 在改良的对数能量范数下的拓扑跟在范数 $\|\mu\|_{K(O,R)}$ 下的拓扑等价. 事实上，

$$
\begin{aligned}
(\mu,\mu)_{K(O,R)} &= (\mu-\mu',\mu)_{E^2} \\
&= (\mu,\mu)^*_{E^2} + (\mu(K)\varepsilon_{O,2R} - \mu',\mu)_{E^2} \\
&= (\mu,\mu)^*_{E^2} - (\mu',\mu)^*_{E^2}.
\end{aligned}
$$

当 $(\mu,\mu)_{K(O,R)}\to 0$ 时，μ 和 μ' 都浑收敛于 o，因此由 $(\mu',\mu)^*_{E^2}$ 的积分表达式知道 $(\mu',\mu)^*_{E^2}\to 0$. 因此，由 $(\mu,\mu)_{K(O,R)}\to 0$ 推出 $(\mu,\mu)^*_{E^2}\to 0$.

反过来，由于 $(\mu,\nu)^*_{E^2}$ 满足 Schwarz 不等式，在这种内积概念下，强收敛包含着弱收敛，弱收敛又包含着浑收敛. 因此，如果 $(\mu,\mu)^*_{E^2}\to 0$，那么 μ 和 μ' 也浑收敛于 o，因此 $(\mu',\mu)^*_{E^2}\to 0$. 从而，由 $(\mu,\mu)^*_{E^2}\to 0$ 也推出 $(\mu,\mu)_{K(O,R)}\to 0$.

这样，我们就证明了所说的等价性. 可是对不同的开球 $K(O,R)\supset K$，$\mathscr{E}_K$ 由范数 $\|\mu\|_{K(O,R)}$ 所得到的拓扑都与由范数 $\|\mu\|^*_{E^2}$ 所得到的拓扑等价，所以由范数 $\|\mu\|_{K(O,R)}$ 所得到的拓扑跟 $K(O,R)\supset K$ 的选择无关.

总结起来得到

定理 3.3.5 假定 K 是 E^n 的一个紧致子集，$n\geqslant 2$，那么相对

于任何不同的开球 $K(O,R)\supset K$，$\mathscr{E}_K$ 是相同的测度族，并且有相同的拓扑. 这里当 $n>2$ 时，$K(0,\infty)$ 看作 $\boldsymbol{E}^n$；当 $n=2$ 时，限制 R 有限，而所说的强拓扑与在改良的对数能量范数下的拓扑等价.

由推论 1 和定理 3.3.5 又得到

推论 2 假定 K 是 $\boldsymbol{E}^2$ 的子开球 $K(O,R)$ 的紧致子集，那么 $\mathscr{E}_K^+$ 在改良的对数能量范数下是完备的凸锥.

§3.4 凌驾原理及扫除法

在这一节仍旧考虑 $\boldsymbol{E}^n$ 的一个子开球 $K(O,R)$. 当 $n>2$ 时，$K(0,\infty)$ 表示 $\boldsymbol{E}^n$；但是当 $n=2$ 时限制 R 为有限，并且所考虑的相对于 $K(O,R)$ 的 Radon 测度是总质量有限的.

$K(O,R)$ 的一个 Borel 子集如果对每个 $\mu\in\mathscr{E}^+$ 都是零集，就说它是**零容的**. 由定理 3.3.5 知道，$\boldsymbol{E}^n$ 的一个有界 Borel 子集 A 零容或者不零容跟所参考的球 $K(O,R)\supset A$ 的选择无关. 另外一方面，$\boldsymbol{E}^n$ 的一个无界的 Borel 子集零容的充分而且必要的条件是这集合的任何有界 Borel 子集零容. 以后，如果一个事实除了一个零容集外处处成立，就说这事实**似乎处处**(简写作 q.p.)**成立**.

现在我们考虑位势论的一个基本原理，所谓**扫除法**.

定义 1 假定 K 是 $\boldsymbol{E}^n$ 的子开球 $K(O,R)$ 的一个相对闭集，$n\geqslant 2$，μ 是相对于 $K(O,R)$ 的一个 Radon 测度. 如果存在一个 $\mu_0\in\mathscr{E}_K$ 使下式在 K 里似乎处处成立：

$$U^{\mu}_{K(O,R)}=U^{\mu_0}_{K(O,R)},\tag{3.4.1}$$

就说 μ_0 是相对于 $K(O,R)$ **把 μ 扫到 K 里去得到的**.

在这里再作一点说明. 假定 μ_0 是把 μ 扫到 K 里去得到的，那么在 K 的内部，$U^{\mu}_{K(O,R)}=U^{\mu_0}_{K(O,R)}$ 处处成立. 理由如下：令 P 是 K 的内点，当 r 是充分小的正数时，有

$$(\mu-\mu_0,\varepsilon_{P,r})=\int_{K(O,R)}U^{\mu-\mu_0}_{K(O,R)}\mathrm{d}\varepsilon_{P,r}=\int_K U^{\mu-\mu_0}_{K(O,R)}\mathrm{d}\varepsilon_{P,r}=0.$$

因此，

$$U^{\mu-\mu_0}_{K(O,R)}(P)=\lim_{r\to 0}(\mu-\mu_0,\epsilon_{P,r})=0.$$

所以在 P 处，$U^{\mu}_{K(O,R)}(P)=U^{\mu_0}_{K(O,R)}(P)$. 当然，这个结果是针对 Green 位势基础上的扫除而言的.

由定义 1 知道，假定 μ_0 是把 μ 扫到 K 里去得到的，那么对任何 $\lambda\in\mathscr{E}_K$，

$$(\mu-\mu_0,\lambda)=\int_K(U^{\mu}-U^{\mu_0})\mathrm{d}\lambda=\int_K 0\,\mathrm{d}\lambda=0,$$

所以 $\mu-\mu_0$ 与 $\mathscr{E}_K$ 正交. 特别，如果 $\mu\in\mathscr{E}$，那么这正交性跟 $\|\mu-\mu_0\|=\min\limits_{\lambda\in\mathscr{E}_K}\|\mu-\lambda\|$ 成立是等价的. 所以 μ_0 必须是 μ 在 $\mathscr{E}_K$ 上的正交投影. 因此扫除是否可能实现可以归结到正交投影是否存在的问题. 可是由于 $\mathscr{E}_K$ 不完备，$\mathscr{E}_K$ 不是 $\mathscr{E}$ 的子 Hilbert 空间，定理 3.1.2并不包含这里所需要的存在及唯一性定理，因此还需要做一点新的研究. 首先，我们有

引理 1 假定 K 是 E^n 的子开球 $K(O,R)$ 的一个相对闭集，$n\geqslant 2$，μ 是相对于 $K(O,R)$ 的一个 Radon 测度. 如果 μ 可以扫到 K 里，那么所得到的测度 μ_0 是唯一的. μ_0 的特点是 $\mu_0\in\mathscr{E}_K$，并且 $\mu-\mu_0$ 跟所有的 $\lambda\in\mathscr{E}_K$ 正交(就是 $(\mu-\mu_0,\lambda)_{K(O,R)}=0$).

证明 假定 μ_0 及 μ_1 是所得到的测度，那么 $U^{\mu_0}_{K(O,R)}=U^{\mu_1}_{K(O,R)}$ 在 K 里似乎处处成立，所以

$$\|\mu_0-\mu_1\|^2=\int_K\left(U^{\mu_0}_{K(O,R)}-U^{\mu_1}_{K(O,R)}\right)\mathrm{d}(\mu_0-\mu_1)=\int_K 0\,\mathrm{d}(\mu_0-\mu_1)=0.$$

因此，$\mu_0=\mu_1$.

现在如果 $\mu_0\in\mathscr{E}_K$ 并且对所有的 $\lambda\in\mathscr{E}_K$，$(\mu-\mu_0,\lambda)_{K(O,R)}=0$，那么 $U^{\mu-\mu_0}$ 必须在 K 里似乎处处等于 0. 因为否则，必须有一个不零容的 Borel 集 A，使 $U^{\mu-\mu_0}>0$，或者 $U^{\mu-\mu_0}<0$，在 A 里处处成立. 假定是前一种情形，那么可以取一个 $\lambda_1\in\mathscr{E}_K$，使 $\lambda_1(A)>0$(因为 A 不零容)，于是 $\lambda=\lambda_1|A\in\mathscr{E}_K$ 并且 $(\mu-\mu_0,\lambda)>0$，跟假设的正交性矛盾，因此不可能. 同样，后一种情形也不可能. 因此，μ_0 是把 μ 扫

到 K 里去得到的.

反过来,如果 μ_0 是把 μ 扫到 K 里去得到的,那么由引理 1 前面的说明,必须 $\mu_0 \in \mathscr{E}_K$ 并且对于 $\lambda \in \mathscr{E}_K$,

$$(\mu - \mu_0, \lambda)_{K(O,R)} = 0. \quad \blacksquare$$

为了建立扫除法的存在定理,我们证明一个著名的凌驾原理.

定理 3.4.1(凌驾原理 H. Cartan) 假定 f 是 E^n 的子开球 $K(O,R)$ 里定义的一个正的上调和函数,$n \geqslant 2$,而 μ 是相对于 $K(O,R)$ 的一个正测度. 如果在 μ 下,$U^\mu \leqslant f$ 在 $K(O,R)$ 里几乎处处成立,那么 $U^\mu \leqslant f$ 在 $K(O,R)$ 里处处成立.

证明 由 § 2.7 推论 1, $\inf(U^\mu, f) = U^\nu$,这里 ν 是一个相对于 $K(O,R)$ 的正测度. 令 $A = \{P \mid U^\mu(P) > f(P), P \in K(O,R)\}$,那么 $\mu(A) = 0$,而在 $K(O,R) \setminus A$ 里,$U^\mu = U^\nu$. 所以

$$\begin{aligned}\|\mu - \nu\|^2 &= \int (U^\mu - U^\nu) \mathrm{d}(\mu - \nu) \\ &= \int_{K(O,R)\setminus A} 0 \, \mathrm{d}(\mu - \nu) + \int_A (U^\mu - U^\nu) \mathrm{d}(-\nu) \leqslant 0.\end{aligned}$$

所以 $\mu - \nu = 0$,即 $\mu = \nu$. 因而 $\inf(U^\mu, f) = U^\mu$. 所以 $U^\mu \leqslant f$ 处处成立. $\blacksquare$

现在可以证明扫除法的存在和唯一定理.

定理 3.4.2(O. Frostman, H. Cartan) 假定 K 是 E^n 的子开球 $K(O,R)$ 的相对闭集,$n \geqslant 2$,$\mu \in \mathscr{E}$,那么可以把 μ 扫到 K 去,并且所得到的测度 μ_0 是唯一的.

证明 先假定 $\mu \in \mathscr{E}^+$. 由 § 3.3 知道 $\mathscr{E}_K^+$ 是 $\mathscr{E}$ 的一个完备凸子锥,因此由定理 3.1.2 知道 μ 在 $\mathscr{E}_K^+$ 上有一个唯一的投影,也就是存在唯一的 $\mu_0 \in \mathscr{E}_K^+$,使

$$(\mu - \mu_0, \mu_0) = \int (U^\mu - U^{\mu_0}) \mathrm{d}\mu_0 = 0,$$

$$(\mu - \mu_0, \lambda) = \int (U^\mu - U^{\mu_0}) \mathrm{d}\lambda \leqslant 0, \quad \lambda \in \mathscr{E}_K^+.$$

由第二个不等式知道 Borel 集 $A = \{P \mid U^\mu(P) > U^{\mu_0}(P), P \in$

$K\}$是零容的，否则存在一个 $\lambda_1 \in \mathscr{E}_K^+$ 使 $\lambda_1(A)>0$，令 $\lambda=\lambda_1|A$ 得到 $\int(U^\mu - U^{\mu_0})d\lambda > 0$，这跟第二个不等式是矛盾的.

因此，$U^\mu \leqslant U^{\mu_0}$ 在 K 里似乎处处成立. 再由第一个等式就知道，$U^\mu = U^{\mu_0}$ 在测度 μ_0 下几乎处处成立. 又由凌驾原理，$U^{\mu_0} \leqslant U^\mu$ 在 $K(O,R)$ 里处处成立，因此得到 $U^\mu = U^{\mu_0}$ 在 K 里似乎处处成立. 所以 μ_0 是把 μ 扫到 K 里去得到的.

假定 μ 不是正测度，那么 $\mu=\mu_+ - \mu_-$，$\mu_+ \in \mathscr{E}^+$，$\mu_- \in \mathscr{E}^+$. 把 μ_+ 和 μ_- 扫到 K 里去得到 μ_{+0} 和 μ_{-0}. 令 $\mu_0=\mu_{+0}-\mu_{-0}$ 就得到所需要的测度.

由引理 1，μ_0 唯一. ▌

由引理 1 和定理 3.4.2 的证明又得到下面的

推论 1 假定 K 是 E^n 的子开球 $K(O,R)$ 的相对闭集，$\mu \in \mathscr{E}$，那么下列事实互相等价：

(1) μ_0 是把 μ 扫到 K 里去(相对于 $K(O,R)$)得到的测度；

(2) $\mu_0 \in \mathscr{E}_K$，并且对任何 $\lambda \in \mathscr{E}_K$，$(\mu-\mu_0,\lambda)_{K(O,R)}=0$；

(3) $\mu_0 \in \mathscr{E}_K$，并且 $\|\mu - \mu_0\|_{K(O,R)} = \inf\limits_{\lambda \in \mathscr{E}_K} \|\mu - \lambda\|_{K(O,R)}$；

(4) $\mu_0=\mu_1-\mu_2$，这里 μ_1,μ_2 分别是 μ_+,μ_- 在 $\mathscr{E}_K^+$ 上的投影.

推论 1 所指出的(1)及(3)的等价是物理现象的一个严格的理论的说明. (3)的物理意义是在 μ 固定不变的情况下，$\mu-\mu_0$ 代表着平衡状态，因为这时候能量极小，如果不输入能量就不能变成别的状态. 所以如果把 μ 看作一个能量有限的电荷分布的话，那么当我们在 μ 所产生的静电场(相对于 $K(O,R)$)放进一个导体 K 的时候，K 里将出现电荷，一直到电荷分布正好是 $-\mu_0$ 的时候才平衡. 根据(1)我们知道 $-\mu_0$ 就是 K 里正好足够似乎处处抵消 μ 的电场的唯一的能量有限的电荷分布. 物理上把 $-\mu_0$ 称作 μ 的感应电荷分布.

物理上著名的一种所谓"趋肤效应"也可以得到理论的说明.

定理 3.4.3 假定 Ω 是 $K(O,R)$ 的开子集，μ 是相对于 $K(O,$

R)的一个 Radon 测度，$|\mu|(K(O,R)\backslash\Omega)=0$ 并且 μ 可以扫到 $K(O,R)\backslash\Omega$里去，那么 μ 可以扫到$K(O,R)\backslash\Omega$的任何一个相对闭集 K 里去，并且只要 $B(\Omega)\cap K(O,R)\subseteq K\subseteq K(O,R)\backslash\Omega$，那么把 μ 扫到 K 里去跟扫到 $B(\Omega)\cap K(O,R)$里去所得的测度是一样的.

证明 假定把 μ 扫到 $K(O,R)\backslash\Omega$ 里去得到 μ_0，那么 $\mu_0\in\mathscr{E}$，因此可以把 μ_0 扫到 $K(O,R)\backslash\Omega$ 的任何一个相对闭集 K 里去. 由定义 1 知道所得到的分布就是把 μ 扫到 K 里去所得到的.

此外，由扫除定义 1 后的说明，$U^{\mu-\mu_0}_{K(O,R)}$ 在 $K(O,R)\backslash\overline{\Omega}$ 里恒等于 0. 可是$U^{\mu}_{K(O,R)}$ 在$K(O,R)\backslash\overline{\Omega}$ 里调和，所以$U^{\mu_0}_{K(O,R)}$ 在 $K(O,R)\backslash\overline{\Omega}$ 里也调和，因此 μ_0 的支柱包含在 $\overline{\Omega}$ 里. 但是 $\mu_0\in\mathscr{E}_{K(O,R)\backslash\Omega}$，所以 μ_0 的支柱包含在 $B(\Omega)\cap K(O,R)$ 里，因此 $\mu_0\in\mathscr{E}_{B(\Omega)\cap K(O,R)}$. 这说明 μ_0 必须就是把 μ 扫到 $B(\Omega)\cap K(O,R)$ 里去所得到的分布. 于是对任何相对闭集 K，只要 $B(\Omega)\cap K(O,R)\subseteq K\subseteq K(O,R)\backslash\Omega$，把 μ 扫到 K 里去所得到的测度也就是 μ_0. ▍

定理 3.4.3 是假设被扫除的测度 μ 的全部正负质量都分布在 Ω 里. 假定不是这样，那么 μ 可以分作 $\mu|\Omega$ 和 $\mu|(K(O,R)\backslash\Omega)$. 对 $\mu|\Omega$，定理 3.4.3 还是适用的. 至于 $\mu|(K(O,R)\backslash\Omega)$，如果能量是有限的，那么扫不扫到 $K(O,R)\backslash\Omega$ 里去是一样的，所以这时候只要把 $\mu|\Omega$ 经过扫除以后得到的测度 ν 加上 $\mu|(K(O,R)\backslash\Omega)$就成了把 μ 扫到 $K(O,R)\backslash\Omega$ 里去所得到的测度. 当然，如果 $\mu|(K(O,R)\backslash\Omega)$的能量无限，那么 $\mu|(K(O,R)\backslash\Omega)$的扫除要另外考虑.

定理 3.4.2 指出能量有限的测度可以扫到 $K(O,R)$的任何一个相对闭集里去，因此由定理 3.4.3 知道，当一个能量有限的测度 μ 的正负质量全都分布在一个相对闭集 K 的外部时，如果把 $K(O,R)\backslash K$的那些跟 μ 的支柱相交的成分的和集记作 Ω，那么说把 μ 扫到 K 里去实际上还不如说清除 Ω 的质量，因为质量只不过被扫到 Ω 的相对边界上去罢了. 这是取“扫除”这个名字的由来. 下面我们要用这个看法来研究扫除法跟所参考的开球的关系.

定理 3.4.4 假定 μ 是 E^n 上的一个 Radon 测度，能量有限. Ω 是 E^n 的开子集，$\Omega\subseteq K(O,R)\cap K(O',K')$，$|\mu|(C(\Omega))=0$. 又假定把 μ 相对于 $K(O,R)$ 及 $K(O',R')$ 扫出 Ω 去后各得到测度 μ_0 及 μ_1，那么

$$\mu_0|(K(O,R)\cap K(O',R'))=\mu_1|(K(O,R)\cap K(O',R')).$$

证明 由 §2.7，

$$U^{\mu}_{K(O,R)}=U^{\mu}_{n}-U^{\mu'}_{n},\quad U^{\mu_0}_{K(O,R)}=U^{\mu_0}_{n}-U^{\mu_0'}_{n},$$

这里 μ' 和 μ_0' 是分布在 $S(O,R)$ 上的测度. 由扫除定义 1 后的说明，$U^{\mu}_{K(O,R)}=U^{\mu_0}_{K(O,R)}$ 在 $C(\overline{\Omega})$ 里处处成立，也就是 $U^{\mu-\mu_0}_{n}=U^{\mu'-\mu_0'}_{n}$ 在 $C(\overline{\Omega})$ 里处处成立. 等号左边的位势在 $C(\overline{\Omega})$ 里调和，因此右边位势也调和，所以 $(\mu'-\mu_0')|C(\overline{\Omega})=o$. 因此在 $C(\overline{\Omega})$ 里，

$$U^{\mu}_{n}=U^{\mu_0}_{n}+U^{\lambda_0}_{n},\tag{3.4.2}$$

这里 $\lambda_0=(\mu'-\mu_0')|(B(\Omega)\cap S(O,R))$ 是一个分布在 $B(\Omega)\cap S(O,R)$ 上的测度.

同样得到在 $C(\overline{\Omega})$ 里，

$$U^{\mu}_{n}=U^{\mu_1}_{n}+U^{\lambda_1}_{n},\tag{3.4.3}$$

这里 λ_1 是一个分布在 $B(\Omega)\cap S(O',R')$ 上的测度.

由(3.4.2)和(3.4.3)得到在 $C(\overline{\Omega})$ 里

$$U^{\mu_0-\mu_1}_{n}=U^{\lambda_1-\lambda_0}_{n}.$$

等号右边的位势在 $K(O,R)\cap K(O',R')$ 里调和，所以等号左边的位势也这样，因此，

$$(\mu_0-\mu_1)|(K(O,R)\cap K(O',R'))=o.\quad\blacksquare$$

定理 3.4.4 说明扫除 E^n 的一个开子集里的能量有限的质量分布跟所参考的开球的关系不是很本质的.

特别，假定开集 Ω(相对于 E^n)的包 $\overline{\Omega}\subset K(O,R)$，那么 $B(\Omega)\cap S(O,R)=\varnothing$，所以(3.4.2)中的 $\lambda_0=o$. 我们知道(3.4.2)不仅在 $C(\overline{\Omega})$ 里成立，而且在 $B(\Omega)\cap K(O,R)$ 上似乎处处成立. 所以在现在这种特殊情况下，

$$U_n^{\mu} = U_n^{\mu_0} \tag{3.4.4}$$

在 $B(\Omega)$ 上似乎处处成立，而在 $C(\overline{\Omega})$ 里处处成立.

在 $n>2$ 时，这不过说把 μ 相对于 $K(O,R)$ 扫到 $B(\Omega)$ 上去跟把 μ 相对于 E^n 扫到 $B(\Omega)$ 上去所得的测度是一致的. 因此只不过是定理 3.4.4 在 $R'=+\infty$ 的特殊情形的推论. 可是当 $n=2$ 时，这表明在对数位势意义下也可以建立扫除法. 我们可以有下面的定义：

定义 2 假定 Ω 是 E^2 的一个有界开子集，μ 是 E^2 上的一个 Radon 测度，$|\mu|(C(\Omega))=0$. 又假定 μ_0 是支柱包含在 $C(\Omega)$ 里的 E^2 上的一个能量有限的 Radon 测度，使

$$U_2^{\mu} = U_2^{\mu_0} \tag{3.4.5}$$

在 $C(\Omega)$ 的任何一个有界子集里似乎处处成立，那么说 μ_0 是**把 μ 相对于 E^2 扫出 Ω 所得到的测度**.

这样，我们建立下面一个形式统一的定理.

定理 3.4.5 假定 Ω 是 E^n 的开子集，$n\geqslant 2$. 当 $n=2$ 时限制 Ω 有界. 若 μ 是 E^n 上一个能量有限的 Radon 测度，那么

(1) 可以相对于 E^n 把 μ 扫出 Ω；

(2) 所得到的测度 μ_0 唯一；

(3) 对任何 $K(O,R)\supset\Omega$，$\mu_0|(B(\Omega)\cap K(O,R))$ 就是把 μ 相对于 $K(O,R)$ 扫到 $K(O,R)\setminus\Omega$ 里去所得到的测度；

(4) 当 Ω 有界时，μ_0 及 μ 的总质量相等.

证明 (1)和(3)的证明已经包含在定理 3.4.4 下面所作的说明中.

结论(4)可以这样证明：作一个开球 $K(O,R)\supset\overline{\Omega}$，$R<+\infty$，那么由于 $\mu-\mu_0$ 的支柱包含在 $\overline{\Omega}$ 里，

$$\int U_n^{\varepsilon_{O,R}} d(\mu-\mu_0) = \begin{cases} -\log_e R[\mu(E^2)-\mu_0(E^2)], & n=2, \\ R^{2-n}[\mu(E^n)-\mu_0(E^n)], & n>2. \end{cases}$$

另外一方面，由于 $U_n^{\mu}=U_n^{\mu_0}$ 在 $S(O,R)$ 上似乎处处成立，

$$\int U_n^{\epsilon_{O,R}} \mathrm{d}(\mu - \mu_0) = \int U_n^{\mu-\mu_0} \mathrm{d}\epsilon_{O,R} = 0.$$

比较这两个等式得到 $n \geqslant 2$ 时，$\mu(\boldsymbol{E}^n) = \mu_0(\boldsymbol{E}^n)$.

结论(2). 当 $n > 2$ 时包含在定理 3.4.2 中. 现在证明 $n = 2$ 的情形.

取 $K(O,R) \supset \bar{\Omega}$，那么由(3.4.3)及 $\mu(\boldsymbol{E}^2) - \mu_0(\boldsymbol{E}^2) = 0$ 的事实得到 $\mu - \mu_0$ 的改良对数位势

$$U_2^{*(\mu-\mu_0)}(P) = \int \log_e \frac{2R}{r_{PQ}} \mathrm{d}(\mu - \mu_0)(e_Q)$$

$$= U_2^{\mu-\mu_0}(P) = 0$$

在 $\overline{K(O,R)} \setminus \Omega$ 里似乎处处成立. 把支柱包含在 $\overline{K(O,R)} \setminus \Omega$ 里的改良对数能量有限的 Radon 测度全体记作 $\mathscr{E}^*_{\overline{K(O,R)}\setminus\Omega}$，那么对任何 $\lambda \in \mathscr{E}^*_{\overline{K(O,R)}\setminus\Omega}$，

$$(\mu - \mu_0, \lambda)^*_{E^2} = \int U_2^{\mu-\mu_0} \mathrm{d}\lambda = \int 0 \, \mathrm{d}\lambda = 0.$$

因此，μ_0 必须是 μ 在 $\mathscr{E}^*_{\overline{K(O,R)}\setminus\Omega}$ 上的正交投影，μ_0 是唯一的. 其实，如果 μ_1 也是把 μ 扫到 $C(\Omega)$ 上去得到的测度，那么同样道理 μ_1 也是 μ 在 $\mathscr{E}^*_{\overline{K(O,R)}\setminus\Omega}$ 上的正交投影. 因此

$$(\mu_0 - \mu_1, \lambda)^*_{E^2} = (\mu_0 - \mu, \lambda)^*_{E^2} + (\mu - \mu_1, \lambda)^*_{E^2} = 0 + 0 = 0.$$

取 $\lambda = \mu_0 - \mu_1$，就得到 $\| \mu_0 - \mu_1 \|^*_{E^2} = 0$，所以 $\mu_0 = \mu_1$. ▌

从定理的证明中看到，能量有限的测度在对数位势意义下的扫除实际上可以看作在改良的对数相互能量的内积概念下的正交投影. 由于改良的对数能量是由对数能量及测度的总质量决定的，我们可以把支柱包含在 $\boldsymbol{E}^2$ 的一个闭子集 K 里，并且总质量等于 c 的能量有限的测度全体记作 $\mathscr{E}_{K,c}$，于是得到

推论 2 假定 Ω 是一个 $\boldsymbol{E}^2$ 的有界开子集，μ 是 $\boldsymbol{E}^2$ 上的一个能量有限的 Radon 测度，$|\mu|(C(\Omega)) = 0$，那么把 μ 扫出 Ω 去所得到的测度 μ_0 是 μ 在改良的相互对数能量的内积意义下在 $\mathscr{E}_{K,\mu(\Omega)}$ 上的正交投影，这里 K 表示任何一闭集，$B(\Omega) \subseteq K \subseteq C(\Omega)$.

证明 从定理 3.4.5 的证明中看到，μ_0 是 μ 在 $\mathscr{E}_{C(\Omega),\mu(\Omega)}$上的正交投影(在改良的对数相互能量的内积意义下)，并且 $\mu_0 \in \mathscr{E}_{B(\Omega),\mu(\Omega)} \subseteq \mathscr{E}_{K,\mu(\Omega)}$. 因此 μ_0 是 μ 在 $\mathscr{E}_{K,\mu(\Omega)}$上的正交投影. ▌

推论 2 指出相对于 $\boldsymbol{E}^2$ 的扫除与相对于开球的扫除的理论上的差异. 它不是测度 μ 在 $\mathscr{E}_K$ 上的正交投影，而是在 $\mathscr{E}_{K,\mu(E^2)}$上的正交投影. 在前面的定义中虽然没有明显地要求扫出来的测度保持原有的总质量，但是要求位势在 $C(\Omega)$里似乎处处保持，这里$C(\Omega)$不能换作任何一个满足 $B(\Omega) \subseteq K \subseteq C(\Omega)$的闭集 K，尽管扫出来的测度实际上只分布在 $B(\Omega)$上. 这是因为只有位势在 $C(\Omega)$上似乎处处保持才能使总质量保持. 比方，把 $\varepsilon_{O,r}(0<r<1)$相对于 $\boldsymbol{E}^2$ 扫出 $K(O,1)$去显然得到 $\varepsilon_{O,1}$. 可是如果只要求在 $S(O,1)$上似乎处处保持 $U_2^{\varepsilon_{O,r}}$ 的数值，那么 $\varepsilon_{O,1}$的任何常数倍 $c\varepsilon_{O,1}$都能做到，因为当 $P \in S(O,1)$时，

$$U_2^{c\varepsilon_{O,1}}(P) = 0 = U_2^{\varepsilon_{O,r}}(P).$$

当 $c \neq 1$ 时，$c\varepsilon_{O,1}$之所以不是从 $\varepsilon_{O,r}$扫出来的是因为 $U_2^{c\varepsilon_{O,1}}$ 在 $C(\Omega)$里不能似乎处处等于 $U_2^{\varepsilon_{O,r}}$，也可以说是因为 $c\varepsilon_{O,1}$在 $c \neq 1$ 时与 $\varepsilon_{O,r}$的总质量不同.

此外，我们注意所说的对数位势意义下的扫除只限于把一个有界开集内部的质量扫清的情形.

极扫除、调和测度、Green 函数 作为扫除的例子，现在谈单位质量 ε_P 的扫除，或者以 P 为极的扫除法.

假定 Ω 是 $\boldsymbol{E}^n$ 的一个开子集，$n \geq 2$. $n=2$ 的时候限制 Ω 有界. 又假定 $P \in \Omega$，那么，可以相对于 $\boldsymbol{E}^n$ 把 ε_P 从 Ω 里扫出去得到一个测度 η_P，η_P 叫做 Ω 的**相对于 $\boldsymbol{E}^n$ 的以 P 为极的调和测度**. η_P 是分布在 Ω 的边界上的. 这个扫除的可能性可以这样证明：作闭球 $\overline{K(P,r)} \subset \Omega$，那么 $\varepsilon_{P,r}$能量有限并且

$$U_n^{\varepsilon_{P,r}} = U_n^{\varepsilon_P}$$

在 $C(\Omega)$里处处成立. 因此，把 $\varepsilon_{P,r}$扫出去得到的测度也是把 ε_P 扫

出去得到的测度.

η_P 的支柱当然只包含在 Ω 的包含 P 的那个成分 Ω_1 的边界上. 特别当 Ω_1 有界时, η_P 的总质量等于 1.

由定理 3.4.5 知道,对任何一个 $K(O,R)\supset\Omega$, $\eta_P|K(O,R)$ 就是把 ε_P 相对于 $K(O,R)$ 扫到 $K(O,R)\backslash\Omega$ 里得到的测度. 因此, $\eta_P|K(O,R)$ 叫做 Ω 的以 P 为极的相对于 $K(O,R)$ 的**调和测度**,它是分布在 Ω 的边界上的. 把

$$G(P,Q,\Omega)=U_n^{\varepsilon_Q}(P)-U_n^{\eta_Q}(P)$$

$$=U_{K(O,R)}^{\varepsilon_Q}(P)-U_{K(O,R)}^{\eta_Q|K(O,R)}(P),\quad (P,Q)\in\overline{\Omega}\times\Omega$$

叫做 Ω 的(以 P 为极、相对于 $K(O,R)$ 的)**Green 函数**.

由于 η_Q 是正测度 ε_Q 扫出来的,由推论 1 知道 η_Q 是正测度,并且从定理 3.4.2 的证明和定理 3.4.3 看到:

$U^{\eta_Q}\leqslant U^{\varepsilon_Q}$ 处处成立;

$U^{\eta_Q}<U^{\varepsilon_Q}$ 在 Q 所在的 Ω 的成分 Ω_1 里处处成立;

$U^{\eta_Q}=U^{\varepsilon_Q}$ 在 $C(\overline{\Omega}_1)$ 里处处成立,在 $B(\Omega_1)$ 上似乎处处成立.

由上述事实知道:

$G(P,Q,\Omega)\geqslant 0$ 在 $\overline{\Omega}_1$ 里处处成立;

$G(P,Q,\Omega)>0$ 在 Ω_1 里处处成立;

$G(P,Q,\Omega)=0$ 在 $\Omega\backslash\overline{\Omega}_1$ 里处处成立,在 $B(\Omega_1)$ 上似乎处处成立.

关于调和测度及 Green 函数的其他性质及应用,以后陆续会看到,这里只讲扫除法怎样用调和测度来表示.

定理 3.4.6 假定 μ 是 E^n 上的一个 Radon 测度, $n\geqslant 2$,它可以相对于 E^n 扫到闭集 K 里去成为测度 μ',那么

$$U_n^{\mu'}(P)=\int U_n^{\mu}\mathrm{d}\eta_P$$

当 $n>2$ 时,对 $P\in C(K)$ 的时候成立;当 $n=2$ 时,对 P 属于 $C(K)$ 的每个有界成分的时候成立.

证明 在 $n>2$ 及 $n=2$ 的所说情形下, ε_P 都可以扫出 $C(K)$

去，因此 η_P 存在，并且由扫除的定义知道

$$U_n^{\mu'}(P)=\int U_n^{\varepsilon_P'}\mathrm{d}\mu'=\int U_n^{\eta_P}\mathrm{d}\mu'$$
$$=\int U_n^{\mu'}\mathrm{d}\eta_P=\int U_n^{\mu}\mathrm{d}\eta_P.\quad \blacksquare$$

习 题

1. 假定 K 是 $K(O,R)$ 的相对闭集，$\mu\in\mathscr{E}^+$，那么 μ' 是把 μ 相对于 $K(O,R)$ 扫到 K 里去所得到的测度的充分而且必要的条件是：

(1) μ' 的支柱包含在 K 里；

(2) $U_{K(O,R)}^{\mu'}\leqslant U_{K(O,R)}^{\mu}$ 在 K 里处处成立；

(3) $U_{K(O,R)}^{\mu'}=U_{K(O,R)}^{\mu}$ 在 K 里似乎处处成立.

2. 假定 Ω 是 $E^n(n\geqslant2)$ 的子区域（$n=2$ 时限制 Ω 有界），当 $Q\in\Omega$ 的时候用 η_Q 表示分布在 Ω 的边界的调和测度，那么，

(1) $(\eta_Q,\eta_{Q'})_{E^n}=U_n^{\eta_Q}(Q')=U_n^{\eta_{Q'}}(Q)$，$Q\in\Omega,Q'\in\Omega$；

(2) 特别当 Ω 是 $K(O,R)$，$0<R<+\infty$，$Q\in\Omega$ 时，η_Q 就是定理 2.7.1 前边所说的 ε_Q'，$G(P,Q,\Omega)$ 就是开球的 Green 函数，特别 $\eta_O=\varepsilon_{O,R}$. 若 Ω 是 $E^n(n>2)$，η_Q 是什么？

3. 把定理 3.4.6 改作相对于 $E^n(n\geqslant2)$ 的子开球 $K(O,R)$ 的情形.

4. 假定 Ω 是 $E^n(n\geqslant2)$ 的子区域（$n=2$ 时假定 Ω 有界）. 又假定 $\{\Omega_m\}$ 是 Ω 的一列单调增加的子区域，$\bigcup\Omega_m=\Omega$. 对任何一点 $Q\in\Omega$，用 $\eta_Q^{(m)}$，m 充分大，及 η_Q 分别表示 Ω_m 及 Ω 的以 Q 为极的调和测度，那么 $\eta_Q^{(m)}$ 强收敛于 η_Q.

第四章　容量、点集的肥瘦和细拓扑

§4.1　紧致集的容量及平衡分布

假定 K 是 E^n 的紧致子集，$n\geqslant 2$，开球 $K(O,R)\supset K$. 当 $n=2$ 的时候限制 R 有限. 假定

$$K\subset\overline{K(O,r)}\subset K(O,R),$$

那么 $U^{\varepsilon_{O,r}}_{K(O,R)}$ 在 $\overline{K(O,r)}$ 里处处等于常数 c，

$$c=\begin{cases}r^{2-n}-R^{2-n}, & n>2,\\ \log_e(R/r), & n=2.\end{cases}$$

所以，$U^{\varepsilon_{O,r}/c}_{K(O,R)}$ 在 $\overline{K(O,r)}$ 里，因而也在 K 里处处等于 1.

把 $\varepsilon_{O,r}/c$ 相对于 $K(O,R)$ 扫到 K 里，得到的测度记作 γ，叫做 K 相对于 $K(O,R)$ 的 **Green 容量分布**. 由定理 4.1.2，γ 与 r 无关. $U^{\gamma}_{K(O,R)}$ 叫做 K 相对于 $K(O,R)$ 的 **Green 容量位势**. $\gamma(K)$ 叫做 K 相对于 $K(O,R)$ 的 **Green 容量**，记作 $\mathrm{Cap}_{K(O,R)}(K)$，或 $\mathrm{Cap}(K)$.

当 $n>2$，$R=\infty$ 时，γ 也叫做 **Newton 容量分布**，而 U^{γ}_{n} 叫做 **Newton 容量位势**，$\gamma(K)$ 叫做 K 的 **Newton 容量**. 以后，为简单不叫 Green 容量分布或 Newton 容量分布，就叫容量分布. 同样就叫容量位势、容量.

由正测度的扫除的特点得到

定理 4.1.1　E^n 的紧致子集 K 相对于 $K(O,R)\supset K$ 的 Green 容量分布 γ 的特点是 $\gamma\in\mathscr{E}^{+}_{K}$，并且

$$U^{\gamma}_{K(O,R)}\begin{cases}=1, & \text{在 } K \text{ 里似乎处处成立；}\\ \leqslant 1, & \text{在 } K(O,R) \text{ 里处处成立.}\end{cases}$$

由 §3.4 扫除定义后的说明，可以知道在 K 的内部，$U^{\gamma}_{K(O,R)}=$

1 处处成立.

容量分布和容量的特点还可以用下面的定理来表达.

定理 4.1.2 假定 Radon 测度 β 的支柱包含在 $K(O,R)$的紧致集 K 里,并且 $U^{\beta_+}_{K(O,R)}\leqslant 1$ 处处成立,那么 $\beta(K)\leqslant\gamma(K)$,等号只有当 $\beta=\gamma$ 的时候成立.

证明 由假定,$U^{\beta_+}\leqslant 1$,因此 $\beta_+\in\mathscr{E}^+_K$. 所以由扫除法可以知道,

$$\left\|\frac{1}{c}\varepsilon_{O,r}-\beta_+\right\|\geqslant\left\|\frac{1}{c}\varepsilon_{O,r}-\gamma\right\|.$$

从两边的平方减去 $\left\|\frac{1}{c}\varepsilon_{O,r}\right\|^2$,那么左边成为

$$\int\left(U^{\beta_+}-2U^{\frac{1}{c}\varepsilon_{O,r}}\right)\mathrm{d}\beta_+=\int(U^{\beta_+}-2)\mathrm{d}\beta_+$$

$$\leqslant\int(1-2)\mathrm{d}\beta_+=-\beta_+(K),$$

而右边等于$-\gamma(K)$. 所以 $\beta_+(K)\leqslant\gamma(K)$. 因此 $\beta(K)\leqslant\gamma(K)$. 如果等式成立,那么 $\beta_-(K)=0$. 因此 $\beta=\beta_+\in\mathscr{E}^+_K$,而且

$$\left\|\frac{1}{c}\varepsilon_{O,r}-\beta_+\right\|=\left\|\frac{1}{c}\varepsilon_{O,r}-\gamma\right\|.$$

因此,$\beta=\gamma$. ∎

当紧致集 K 相对于 $K(O,R)\supset K$ 的 Green 容量分布 γ 不是零测度时,可以定义测度 $\omega=\dfrac{1}{\gamma(K)}\gamma$. ω 叫做 K 相对于 $K(O,R)$ 的 **Green 平衡分布**,$U^{\omega}_{K(O,R)}$ 叫做 K 相对于 $K(O,R)$ 的 **Green 导体位势**. 可以证明

定理 4.1.3 相对于 $K(O,R)$的正容量紧致子集 K 上的平衡分布是 K 上唯一的能量最小的单位分布,这最小的能量等于 K 的容量的倒数.

证明 如果令 $\alpha=\dfrac{1}{c\gamma(K)}\varepsilon_{O,r}$, 则 ω 就是 α 扫到 K 上来所形成的分布. 因此,对 K 上任何能量有限的单位分布 β

$$\| \alpha - \beta \| \geqslant \| \alpha - \omega \|.$$

从两边的平方减去$\| \alpha \|^2$,就得到

$$\| \beta \|^2 - 2\int U^{\alpha} \mathrm{d}\beta = \| \beta \|^2 - 2/\gamma(K)$$
$$\geqslant \| \omega \|^2 - 2/\gamma(K).$$

所以得到$\| \beta \|^2 \geqslant \| \omega \|^2$. 等式成立只能是$\| \alpha - \beta \| = \| \alpha - \omega \|$. 因此$\beta = \omega$.

这最小的能量是 $\| \omega \|^2 = \int U^{\omega} \mathrm{d}\omega = \int \frac{1}{\gamma(K)} \mathrm{d}\omega = \frac{1}{\gamma(K)}$. ▌

定理 4.1.3 说明了ω之所以称为平衡分布的理由. 我们还可以证明

定理 4.1.4 $K(O,R)$的紧致子集K相对于$K(O,R)$的 Green 容量$\gamma(K)$满足

$$\gamma(K) = 1/\inf_{\beta} \{ \sup_{P \in K} U^{\beta}_{K(O,R)}(P) \},$$

这里 inf 是关于K上所有的单位分布β取的. 平衡分布ω是达到这个inf 的唯一的单位分布.

证明 假定β是K上的一个单位分布, $\sup_{P \in K} U^{\beta}(P)$有限, 那么$\beta \in \mathscr{E}^{+}_{K}$. 因此

$$\| \beta \|^2 = \int U^{\beta} \mathrm{d}\beta \leqslant \sup_{P \in K} U^{\beta}(P) \cdot \int \mathrm{d}\beta = \sup_{P \in K} U^{\beta}(P).$$

由定理 4.1.3, $\| \beta \|^2 \geqslant 1/\gamma(K)$, 所以$\sup_{P \in K} U^{\beta}(P) \geqslant 1/\gamma(K)$. 等号成立只能是$\beta = \omega$. ▌

一个紧致集K相对于一个开球$K(O,R)$的 Green 容量和平衡分布的概念可以用电容器的物理模型来作最直观的说明. 假定K和$S(O,R)$分别是电容器的阴极和阳极, 那么由定义, K相对于$K(O,R)$的 Green 容量$\mathrm{Cap}_{K(O,R)}(K)$就是两极间电位差不超过 1 的可以容纳的最大的正电荷量. 这正是这个电容器的电容的概念. 这个最大的电荷分布就是相对于$K(O,R)$的容量分布γ. 由上面的讨论知道这个分布及它在阴极感应起来的分布所产生的静电场

的能量

$$\|\gamma\|^2_{K(O,R)} = \int U^{\gamma}_{K(O,R)} \mathrm{d}\gamma = \int \mathrm{d}\gamma = \gamma(K) = \mathrm{Cap}_{K(O,R)}(K)$$

就等于电容. 另一方面,平衡分布是单位电荷在 K 里所能有的能量最小的分布. 我们前面证明它是容量分布的常数倍,因此也是使两极间电位差最小的分布,并且这分布及它在阴极感应起来的分布所产生的静电场的能量的倒数就是这电容器的电容.

前面关于紧致集相对于一个开球的情形的理论自然已经包括了相对于维数 $n>2$ 的欧氏空间 $\boldsymbol{E}^n$ 的情形. 下面要说明甚至相对于 $\boldsymbol{E}^2$ 也可以建立类似的理论.

由于相对于 $\boldsymbol{E}^2$ 扫除原理比较狭隘,我们先从 $\boldsymbol{E}^2$ 的紧致子集相对于 $\boldsymbol{E}^2$ 的对数平衡分布着手来进行要比较方便一些. 从定理 4.1.3 看到 $\boldsymbol{E}^n$ 的 $K(O,R)$ 的紧致子集 K 相对于 $K(O,R)$ 的 Green 平衡分布 ω 事实上是零测度在 $\mathscr{E}_{K,1}$ 上的投影,因为

$$\|o-\omega\| = \min_{\mu\in\mathscr{E}_{K,1}} \|o-\mu\|.$$

§ 3.2 已经说过,对于 $\boldsymbol{E}^2$ 的一个紧致子集 K 来说,在改良对数能量的范数下,$\mathscr{E}^+_{K,1}$ 仍旧是完备的凸集. 因此可以给出下面的定义:

假定 K 是 $\boldsymbol{E}^2$ 的紧致子集,那么在改良对数相互能量内积下零测度在 $\mathscr{E}^+_{K,1}$ 上的投影 ω 叫做 K **的对数平衡分布**. 此外,如果 $\mathscr{E}^+_{K,1}$ 空,规定 $\omega=o$. 换句话说,ω 是 $\mathscr{E}^+_{K,1}$(不空的话)里唯一的改良对数能量最小的测度,因此也是 $\mathscr{E}^+_{K,1}$ 里唯一的对数能量最小的测度. U^{ω}_2 称作 K 的**对数导体位势**.

假定 ω 的对数能量是 L,那么 $1/\mathrm{e}^L$ 叫做 K 的**对数容量**或者**解析容量**. 这里用 e^L 的倒数代替 L 的倒数当作容量的定义是因为 L 不一定是正的.

下面我们要证明 $\boldsymbol{E}^2$ 的紧致子集 K 的对数导体位势也像 K 相对于开圆的 Green 导体位势那样,在 K 里似乎处处等于一个常数 L,并且在 $\boldsymbol{E}^2$ 里处处不超过 L. 在相对于开圆的情形,这个事实是扫除原理的结论,所以是跟凌驾原理分不开的. 凌驾原理并不适用

于对数位势，不过为了我们的目的，可以用一个比较弱的定理来代替. 我们先证明

引理 1 假定 E^2 的一个正 Radon 测度 μ 的支柱是 K，那么对 K 的任何一个聚点 Q_0，只要 U_2^μ 在 Q_0 的一个邻域里确定，就有

$$\varlimsup_{E^2 \ni P \to Q_0} U_2^\mu(P) = \varlimsup_{K \ni P \to Q_0} U_2^\mu(P). \tag{4.1.1}$$

证明 先假定 $\mu(\{Q_0\})=0$. 对一个开圆 $K(Q_0,r)$，令

$$\mu_1 = \mu | K(Q_0,r), \quad \mu_2 = \mu | C(K(Q_0,r)),$$

那么 $U_2^\mu = U_2^{\mu_1} + U_2^{\mu_2}$，而 $U_2^{\mu_2}$ 在 Q_0 连续.

对任何一点 $P \in C(K)$，用 P' 表示 K 里跟 P 最近的一点，那么对任何 $Q \in K$，$r_{P'Q} \leqslant r_{PP'} + r_{PQ} \leqslant 2r_{PQ}$. 因此

$$-\log_e r_{P'Q} \geqslant -\log_e 2 - \log_e r_{PQ}.$$

所以

$$U_2^{\mu_1}(P') \geqslant -\log_e 2 \cdot \mu(K(Q_0,r)) + U_2^{\mu_1}(P), \quad P \in C(K). \tag{4.1.2}$$

当 $C(K) \ni P \to Q_0$ 时，$r_{P'Q_0} \leqslant 2r_{PQ_0} \to 0$. 所以 $P' \to Q_0$. 故由(4.1.2)得到

$$\varlimsup_{C(K) \ni P \to Q_0} U_2^{\mu_1}(P) \leqslant \varlimsup_{K \ni P' \to Q_0} U_2^{\mu_1}(P') + \log_e 2 \cdot \mu(K(Q_0,r)).$$

因此

$$\varlimsup_{E^2 \ni P \to Q_0} U_2^{\mu_1}(P) \leqslant \varlimsup_{K \ni P' \to Q_0} U_2^{\mu_1}(P') + \log_e 2 \cdot \mu(K(Q_0,r)).$$

从而得到

$$\varlimsup_{E^2 \ni P \to Q_0} U_2^\mu(P) \leqslant \varlimsup_{K \ni P' \to Q_0} U_2^\mu(P') + \log_e 2 \cdot \mu(K(Q_0,r)).$$

令 $r \to 0$，右边第二项趋于 0. 由此知道(4.1.1)式左边不大于(4.1.1)式的右边. 可是小于是不可能的，所以(4.1.1)式成立.

如果 $\mu(\{Q_0\})>0$，那么 $U_2^\mu(Q_0)=+\infty$. 因此

$$\varlimsup_{K \ni P' \to Q_0} U_2^\mu(P') \geqslant \varliminf_{E^2 \ni P \to Q_0} U_2^\mu(P) \geqslant U_2^\mu(Q_0) = +\infty.$$

所以(4.1.1)式成立. ▎

引理 2(小凌驾原理) 假定 μ 是 E^2 上的一个支柱紧致的非零的正 Radon 测度, M 是实数, $U_2^\mu \leqslant M$ 在测度 μ 下几乎处处成立, 那么 $U_2^\mu \leqslant M$ 处处成立.

证明 首先, $U_2^\mu \leqslant M$ 在 μ 的支柱 K 里处处成立. 因为如果存在一点 $P_0 \in K$ 使 $U_2^\mu(P_0) > M$, 那么由 U_2^μ 的下半连续性, P_0 有一个邻域 V 使 $U_2^\mu > M$ 在 V 里处处成立. 可是 $\mu(V) > 0$. 这跟假设矛盾.

现在令 $\sup\limits_{P \in E^2} U_2^\mu(P) = M'$. 只要证明 $M' \leqslant M$ 就行了.

注意, K 没有孤立点, 因为在正测度的支柱, 孤立点必须有质量正的质点, U_2^μ 在这点必须等于 $+\infty$, 于是必须 $M = +\infty$, 这是不用考虑的.

取一点列 $\{P_m\}$ 使 $U_2^\mu(P_m) \to M'$, 它至多有三种情形.

第一种情形 $\{P_m\}$ 有聚点 $Q_0 \in K$, 于是有子列 $\{Q_m\}$ 收敛于 Q_0. 由上面的说明, Q_0 是 K 的聚点, 那么由引理 1

$$M' = \varlimsup_{m \to \infty} U_2^\mu(Q_m) \leqslant \varlimsup_{E^2 \ni P \to Q_0} U_2^\mu(P)$$

$$= \varlimsup_{K \ni P' \to Q_0} U_2^\mu(P') \leqslant M.$$

所以 $M' \leqslant M$ 成立.

第二种情形 $\{P_m\}$ 有聚点 $Q_0 \in C(K)$, 于是有子列 $\{Q_m\}$ 收敛于 $Q_0 \in C(K)$. U_2^μ 在 Q_0 调和, 因而连续, 因此

$$U_2^\mu(Q_0) = \lim_{m \to \infty} U_2^\mu(Q_m) = M'.$$

所以 U_2^μ 在 Q_0 达到极大值 M'. 因此在 Q_0 所在的 $C(K)$ 的成分 Ω 里 U_2^μ 等于常数 M'. $B(\Omega) \cap K$ 当然不空, 因此有一点 $Q_0 \in B(\Omega) \cap K$. 于是 Q_0 是 K 的聚点并且

$$M' = \lim_{\Omega \ni P \to Q_0} U_2^\mu(P) \leqslant \varlimsup_{K \ni P' \to Q_0} U_2^\mu(P') \leqslant M.$$

第三种情形 $\{P_m\}$没有聚点，这时候 r_{QP_m} 对 $Q\in K$ 一致地趋于$+\infty$. 所以

$$U_2^{\mu}(P_m)=-\int\log_e r_{QP_m}\mathrm{d}\mu(e_Q)\to-\infty.$$

因此，$M'=-\infty\leqslant M$. ▍

引理 2 的 $\boldsymbol{E}^2$ 可以改为一般的 $\boldsymbol{E}^n$，不过当 $n>2$ 时，这只不过是凌驾原理的明显的推论，用不着再提. 也就是因此有人把它叫做 H. Cartan 的狭义凌驾原理. 引理 2 主要是 Maria 及 Frostman 先后独立建立的，他们把它叫做"极大值原理". 由引理 2 不难证明

定理 4.1.5 $\boldsymbol{E}^2$ 的紧致子集 K 的对数导体位势处处不超过一个常数 L，在 K 里似乎处处等于 L.

证明 由 K 的对数平衡分布 ω 的定义和定理 3.1.2 中(2)知道

$$(o-\omega,\mu-\omega)_{E^2}^{*}\leqslant 0,\quad \mu\in\mathscr{E}_{K,1}^{+}.$$

因此

$$(\omega,\mu)_{E^2}^{*}\geqslant\|\omega\|_{E^2}^{*2}.$$

由改良对数位势的定义，上面不等式可以改写为

$$\int U_2^{\omega}\mathrm{d}\mu\geqslant\int U_2^{\omega}\mathrm{d}\omega=L,\quad \mu\in\mathscr{E}_{K,1}^{+}.$$

由这不等式，(B)集 $e=\{P\,|\,U_2^{\omega}(P)<L,P\in K\}$是零容的. 否则存在一个 $\lambda\in\mathscr{E}_K$ 使 $\lambda(e)>0$. 因此

$$\lambda_1=\frac{\lambda|e}{\lambda(e)}\in\mathscr{E}_{K,1}^{+},$$

并且

$$\int U_2^{\omega}\mathrm{d}\lambda_1<L=\int U_2^{\omega}\mathrm{d}\omega.$$

这是不可能的.

这样，$U_2^{\omega}-L$ 在 K 里似乎处处非负. 可是

$$\int(U_2^{\omega}-L)\mathrm{d}\omega=L-L=0,$$

因此 $U_2^{\omega}-L=0$ 在测度 ω 下几乎处处成立. 因此由引理 2 知道 $U_2^{\omega}\leqslant L$ 处处成立.

已经说过$U_2^{\omega}\geqslant L$在K里似乎处处成立，所以又得到$U_2^{\omega}=L$在K里似乎处处成立. ▌

由定理4.1.5知道K的对数平衡分布ω的改良对数位势也在K里似乎处处等于正常数$\log_e 2R+L$. 假定$K\subset K(O,R)$的话，把$2R$改写作a，那么a就可以是任何一个大于K的直径的正数(因为可以适当选择O使$K\subset K(O,a/2)$)，于是

$$U_2^{*\,\omega/(\log_e a+L)}=1$$

在K里似乎处处成立. 因此我们把$\omega/(\log_e a+L)=\gamma$叫做$K$的**Wiener容量分布**，$1/(\log_e a+L)$叫做$K$的**Wiener容量**.

注意，根据上面的定义，E^n的一个紧致子集K对于不同的开球$K(O,R)$的Green容量是不同的. 在$n=2$的情形，K的对数容量又是另外一个数值. 比方闭球$\overline{K(O,r)}$及球面$S(O,r)$相对于开球$K(O,R)$的Green平衡分布是$\varepsilon_{O,r}(r<R)$. 因为

$$U_{K(O,R)}^{\varepsilon_{O,r}}\leqslant\begin{cases}r^{2-n}-R^{2-n}, & n>2,\\ \log_e R/r, & n=2\end{cases}$$

处处成立，并且在$\overline{K(O,r)}$里等号似乎处处成立，因此我们可以看到$\overline{K(O,r)}$及$S(O,r)$相对于$K(O,R)$的Green容量是$(r^{2-n}-R^{2-n})^{-1}$($n>2$时)或者$(\log_e R/r)^{-1}$($n=2$时)，跟$K(O,R)$的选择显然有关. 此外，当$n=2$时，$\overline{K(O,r)}$及$S(O,r)$的对数平衡分布显然也是$\varepsilon_{O,r}$，但是对数容量却是r.

非但这样，Green平衡分布一般也跟所参考的开球有关. 比方$\overline{K(O,r)}$相对于$K(O',R)$($\overline{K(O,r)}\subseteq K(O',R)$)的Green平衡分布当$O\neq O'$时就不是$\varepsilon_{O,r}$.

但是，无论哪一种情形，K的容量等于0总是$\mathscr{E}_{K,1}^{+}$空的意思. $\mathscr{E}_{K,1}^{+}$当作一个测度族看，无论是参考于一个开球或者是在改良对数位势意义下，总是唯一的. 这个事实可以用下面的定理来表述.

定理4.1.6 如果$E^n(n\geqslant 2)$的紧致子集K相对于一个开球$K(O,R)\supset K$，或者相对于E^n，容量都等于0，那么它是零容的. 反

过来，如果 K 零容，那么 K 相对于任何一个开球 $K(O,R)\supset K$ 以及相对于 E^n，容量都等于 0.

证明 如果 K 零容，那么 $\mathscr{E}_K^+$ 只包含零测度，因此 $\mathscr{E}_{K,1}^+$ 空. 所以 K 的容量是 0. 反过来，$\mathscr{E}_{K,1}^+$ 空也就是 $\mathscr{E}_K^+$ 只包含零测度，因此 K 零容. 否则存在 $\mu\in\mathscr{E}^+$ 使得 $\mu(K)>0$. 但 K 是闭集，$\mu|K$ 的支柱必须包含在 K 里，也就是 $\mu|K\in\mathscr{E}_K^+$，$\mathscr{E}_K^+$ 就不空了. ▌

我们以后会陆续看到，容量的概念是获得位势论许多深入结论的重要工具. 这里先顺便谈一个有关扫除法的有趣的现象.

$E^n(n\geqslant 2)$ 的一个紧致子集 K 的余集的无界成分叫做 K 的**外区域**，记作 $A(K)$. 假定开球 $K(O,R)\supset K$，那么把 $K(O,R)\cap A(K)$ 叫做 K **相对于** $K(O,R)$**的外区域**. 把 $K(O,R)\cap A(K)$ 里的质量相对于 $K(O,R)$ 的扫出去称为对 K 的**相对于** $K(O,R)$ **的外扫除**，把 $C(A(K))$ 里的质量扫出去称为对 K 的**内扫除**. 由 § 3.4 知道内扫除一概可以看作相对于 E^n.

定理 4.1.7 假定 K 是 E^n 的一个不零容的紧致子集，那么一个测度经过对 K 的内扫除后总质量不变. 可是一个非零的正测度经过对 K 的相对于 $K(O,R)\supset K$ 的外扫除后，总质量小于原有的总质量.

证明 注意，K 相对于 $K(O,R)\supset K$ 的 Green 容量位势 U^γ 在 $K(O,R)\cap A(K)$ 里处处小于 1，在 $C(A(K))$ 里似乎处处等于 1. 假定 μ 是一个测度，$|\mu|(A(K))=0$，那么经过内扫除后所得到的测度 μ' 的总质量是

$$\mu'(K)=\int 1\mathrm{d}\mu'=\int U^\gamma\mathrm{d}\mu'=\int U^{\mu'}\mathrm{d}\gamma$$
$$=\int U^\mu\mathrm{d}\gamma=\int U^\gamma\mathrm{d}\mu=\int 1\mathrm{d}\mu=\mu(C(A(K))).$$

另一方面，如果 $\mu>0$，并且 $\mu(C(A(K)))=0$，那么经过外扫除后所得到的测度 μ' 的总质量是

$$\mu'(K)=\int 1\mathrm{d}\mu'=\int U^\gamma\mathrm{d}\mu'=\int U^{\mu'}\mathrm{d}\gamma$$

$$= \int U^{\gamma'} \mathrm{d}\gamma = \int U^{\gamma} \mathrm{d}\mu < \int 1 \mathrm{d}\mu = \mu(A(K)).$$ ▌

定理 4.1.7 中关于内扫除的话是 §3.4 说过的，这里不过是给它另外一个证明就是了. 至于外扫除以后质量的亏损部分，当 R 有限时事实上可以看作扫到 $S(O,R)$ 上去. 因为相对于更大的开球来说，这是对紧致集 $\overline{K(O,R) \cap A(K)}$ 的内扫除，而且在这情形下扫除的结果比相对于 $K(O,R)$ 的外扫除所得到的测度只多一部分分布在 $S(O,R)$ 上的质量.

习 题

1. $\boldsymbol{E}^n$ 的一个紧致子集 K 相对于一个开球 $K(O,R) \supset K$ 的 Green 容量分布记作 γ. 证明 γ 是唯一的支柱包含在 K 里并且能够使下式成立的测度：对所有 $\mu \in \mathscr{E}_{K,\mathrm{Cap}(K)}$，

$$\| \gamma \|_{K(O,R)} \leqslant \| \mu \|_{K(O,R)}.$$

2. 证明：假定映射 f 把 $\boldsymbol{E}^n$ 的紧致子集 K 映入 $\boldsymbol{E}^n$，并且对任何 $(P,Q) \in K \times K$ 有 $r_{f(P)f(Q)} \leqslant r_{PQ}$，那么

(1) f 在 K 里连续，因此 $f(K)$ 紧致；

(2) $\mathrm{Cap}_{\boldsymbol{E}^n}(f(K)) \leqslant \mathrm{Cap}_{\boldsymbol{E}^n}(K)$（压缩原理）. 试把压缩原理推广到相对于一个开球的情形.

3. $\boldsymbol{E}^n (n>2)$ 的紧致子集 K 的 Newton 容量位势 U_n^{γ} 满足下面的不等式：

$$r^{2-n}\mathrm{Cap}(K) \leqslant U_n^{\gamma}(P) \leqslant (r')^{2-n}\mathrm{Cap}(K),$$

这里 r 及 r' 分别表示 P 点到 K 里的点的距离的上、下界.

4. (1) 证明：$\boldsymbol{E}^n (n \geqslant 2)$ 的一个子超平面 $\boldsymbol{E}^{n-1}$（$n=2$ 时，$\boldsymbol{E}^{n-1}$ 理解为直线）的一个 $(n-1)$ 维 Lebesgue 测度正的紧致子集 K 相对于 $\boldsymbol{E}^n$ 或者相对于 $\boldsymbol{E}^n$ 的子开球 $K(O,R) \supset K$ 的容量是正的.

(2) 利用(1)和压缩原理证明：$\boldsymbol{E}^n$ 的一个子超曲面（$n=2$ 时理解为曲线）的一个紧致子集 K，如果在某一个超平面上的正交投影的 $(n-1)$ 维 Lebesgue 测度是正的，那么相对于 $\boldsymbol{E}^n$ 或者相对于

E^n 的子开球 $K(O,R)\supset K$ 的容量是正的.

5. 假定 $E^n(n\geqslant 2)$的一列子开球 $K(O,R_m)\supset K$, K 紧致, $R_m \to R$, $0<R\leqslant+\infty$, 那么 K 相对于 $K(O,R_m)$的平衡分布 ω_m 强收敛于 K 相对于 $K(O,R)$的平衡分布 ω.

§4.2 外容量、内容量与可定容

$E^n(n\geqslant 2)$的紧致子集 S 的容量已经说过了, 现在记作 $\mathrm{Cap}(S)$, 可以是 Green 容量或 Newton 容量. 不过相对于 E^2 的容量, 这里当作 Wiener 容量理解, 因此所考虑的点集是一个固定的开圆的子集. $\mathrm{Cap}(S)$ 有下面的性质:

(1) **单调增加性** 假定 S 和 S'是两个紧致集, $S\subseteq S'$, 那么

$$\mathrm{Cap}(S)\leqslant \mathrm{Cap}(S').$$

(2) **右半连续性** 假定 S 是紧致集, 那么任意指定一个正数 ε 以后, 存在一个邻域 $V\supset S$ 使对任何紧致集 S', 只要 $S\subseteq S'\subset V$,

$$\mathrm{Cap}(S')-\mathrm{Cap}(S)<\varepsilon.$$

(3) **强的次可加性** 对任何两个紧致集 S 和 S',

$$\mathrm{Cap}(S\cap S')+\mathrm{Cap}(S\cup S')\leqslant \mathrm{Cap}(S)+\mathrm{Cap}(S').$$

性质(1)是显然的. 要证明(2), 先证明: 假定一列单调减小的紧致集$\{S_m\}$的交集是 S, 那么

$$\mathrm{Cap}(S)=\lim_{m\to\infty}\mathrm{Cap}(S_m).$$

事实上, 由选择定理, $\{S_m\}$的容量分布$\{\gamma_m\}$有一个子列$\{\gamma_{m_i}\}$浑收敛于一个测度 γ, γ 的支柱必须是 S 的子集. 又因为

$$U^{\gamma}(P)\leqslant \varliminf_{i\to\infty}U^{\gamma_{m_i}}(P)\leqslant 1,$$

所以 $\gamma(S)\leqslant \mathrm{Cap}(S)$. 另外一方面, 对 S 的任何一个邻域 W, 下面的关系成立:

$$\begin{aligned}\gamma(S)=\gamma(W)&=\lim_{i\to\infty}\gamma_{m_i}(W)=\lim_{i\to\infty}\gamma_{m_i}(S_{m_i})\\&=\lim_{i\to\infty}\mathrm{Cap}(S_{m_i})=\lim_{m\to\infty}\mathrm{Cap}(S_m).\end{aligned}$$

因此，$\mathrm{Cap}(S) \geqslant \lim\limits_{m\to\infty} \mathrm{Cap}(S_m)$. 但是 $S \subseteq S_m$，上面不等式中的不等号不能成立. 因此$\mathrm{Cap}(S) = \lim\limits_{m\to\infty} \mathrm{Cap}(S_m)$.

现在可以证明(2). 作一列单调减小的紧致集 S_m，每个 S_m 的内部包含 S 并且 $\bigcap\limits_m S_m = S$. 于是$\mathrm{Cap}(S) = \lim\limits_{m\to\infty} \mathrm{Cap}(S_m)$. 所以对任意指定的正数 ε，存在一个 S_{m_0}，使

$$\mathrm{Cap}(S_{m_0}) - \mathrm{Cap}(S) < \varepsilon.$$

把 S_{m_0}的内部记作 V 就符合要求.

再来证明(3). 假定 $S, S', S\cap S'$ 及 $S\cup S'$ 的容量分布分别是 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 及 γ_4，那么在 S 里下式似乎处处成立：

$$U^{\gamma_3} + U^{\gamma_4} \leqslant U^{\gamma_2} + 1 = U^{\gamma_2} + U^{\gamma_1}.$$

同样在 S' 里也是如此. 所以

$$(\gamma_3 + \gamma_4)(S \cup S') = \int U^{\gamma_4} \mathrm{d}(\gamma_3 + \gamma_4) = \int U^{\gamma_3+\gamma_4} \mathrm{d}\gamma_4$$

$$\leqslant \int U^{\gamma_1+\gamma_2} \mathrm{d}\gamma_4 = \int U^{\gamma_4} \mathrm{d}(\gamma_1 + \gamma_2) = (\gamma_1 + \gamma_2)(S \cup S').$$

因此得到(3).

现在对任意点集 A①，把

$$\mathrm{Cap}_i(A) = \sup \mathrm{Cap}(S),$$

$$\mathrm{Cap}_e(A) = \inf \mathrm{Cap}(V)$$

分别称为 A 的**内容量**及**外容量**，这里 sup 是关于 A 的所有紧致子集 S 取的，inf 是关于所有的包含 A 的开集 V 取的. 由(1)知道，$\mathrm{Cap}_i(A) \leqslant \mathrm{Cap}_e(A)$. 由(1)及(2)我们知道紧致集的内外容量都等于前一节所定义的容量. 因此，如果一个点集 A 的内外容量相等，我们说 A 是**可定容的**，并且把它的内外容量的共同值记作

---

① 根据先前的规定，当 $n=2$ 时，限制 A 有界. 不过如果用对数容量代替 Wiener 容量，那么可以得到无界点集的内外对数容量的概念. 由于对一个固定的开圆的紧致子集来说，对数容量是 Wiener 容量的单调增加连续函数，下面许多结论也适用于内外对数容量，我们不谈.

$\mathrm{Cap}(A)$，称为 A 的**容量**.

由定义，开集可定容.

假定一个集合 A 的内容量有限，取 A 的一列单调增加的紧致子集 $\{K_m\}$ 使

$$\mathrm{Cap}(K_m) \to \mathrm{Cap}_i(A).$$

把 K_m 的容量分布（指 Green 容量分布、Newton 容量分布或 Wiener 容量分布）记作 γ_m，那么当 $p>m$ 时，

$$\begin{aligned}\|\gamma_m - \gamma_p\|^2 &= \|\gamma_m\|^2 + \|\gamma_p\|^2 - 2(\gamma_m, \gamma_p) \\ &\leqslant \mathrm{Cap}(K_m) + \mathrm{Cap}(K_p) - 2\,\mathrm{Cap}(K_m) \\ &= \mathrm{Cap}(K_p) - \mathrm{Cap}(K_m).\end{aligned}$$

因此 $\{\gamma_m\}$ 强收敛于一个正测度 γ_*，称为 A 的**内容量分布**. 由于 $\{U^{\gamma_m}\}$ 单调增加，U^{γ_m} 收敛于 U^{γ_*}. U^{γ_*} 叫**内容量位势**. 因此在 A 的内部 $U^{\gamma_*}=1$. 此外，$\gamma_*(A) = \|\gamma_*\|^2 = \mathrm{Cap}_i(A)$.

又假定 A 的外容量有限，取一列单调减小的开集 $\{V_m\}$ 使

$$\mathrm{Cap}(V_m) \to \mathrm{Cap}_e(A).$$

同样，V_m 的内容量分布 γ'_m 强收敛于一个正测度 γ^*，叫做 A 的**外容量分布**. U^{γ^*} 叫**外容量位势**. 同样，在 A 的内部 $U^{\gamma^*} = 1$，而 $\gamma^*(A) = \|\gamma^*\|^2 = \mathrm{Cap}_e(A)$.

特别，当 A 可定容时，$\gamma^* = \gamma_*$，这时候 γ^* 或 γ_* 称作 A 的**容量分布**.

关于点集的可定容性，1955 年以后，G. Choquet 曾经做过深入的研究，他的成果可以介绍如下. 下面先说外容量的三个基本性质：

(1) 单调增加性：如果 $A \subset A' \subset E^n$，那么 $\mathrm{Cap}_e(A) \leqslant \mathrm{Cap}_e(A')$.

(2) 假定 $\{A_m\}$ 是 E^n 的一列单调增加的子集，那么

$$\mathrm{Cap}_e\Big(\bigcup_m A_m\Big) = \sup_k \mathrm{Cap}_e(A_k).$$

(3) 假定 $\{K_m\}$ 是 E^n 的一列单调减小的紧致子集，那么

$$\mathrm{Cap}_e\Big(\bigcap_m K_m\Big)=\inf_k\ \mathrm{Cap}_e(K_k).$$

这些性质中,(1)和(3)是相当明显的,现在证明(2).

先假设每个 A_m 都是开集,那么 $A=\bigcup_m A_m$ 是开集. 于是对任一个比Cap(A)小的数 d,A 有一个紧致子集 K 使Cap$(K)\geqslant d$. 另外一方面,当 m 充分大时,$A_m\supset K$. 因此,Cap$(A_m)\geqslant$ Cap$(K)\geqslant d$. 所以(2)在这种特殊情况下成立.

如果不是所有的 A_m 都是开集,那么当存在 m 使 $\mathrm{Cap}_e(A_m)=\infty$ 时,(2)也是显然的,所以只要考虑所有的$\mathrm{Cap}_e(A_m)$都有限的情况. 随便指定一个正数 b 以后,我们总可以取一列正数$\{b_m\}$使 $\sum_m b_m=b$. 由外容量的定义,对每个 b_m 存在一个开集 $W_m\supset A_m$ 使

$$\mathrm{Cap}(W_m)-\mathrm{Cap}_e(A_m)\leqslant b_m.$$

因此,由前面证明的关于开集列的结果,可以得到

$$\mathrm{Cap}\Big(\bigcup_m W_m\Big)=\lim_{q\to\infty}\ \mathrm{Cap}\Big(\bigcup_{m=1}^{q}W_m\Big)$$

$$\leqslant\lim_{q\to\infty}\Big(\mathrm{Cap}_e\Big(\bigcup_{m=1}^{q}A_m\Big)+\sum_{m=1}^{q}b_m\Big).$$

从而有 $$\mathrm{Cap}\Big(\bigcup_m W_m\Big)\leqslant\lim_{q\to\infty}\mathrm{Cap}_e(A_q)+b.$$

因此 $$\mathrm{Cap}_e\Big(\bigcup_m A_m\Big)\leqslant\lim_{q\to\infty}\mathrm{Cap}_e(A_q).$$

不等号当然不可能成立,所以得到了外容量性质(2).

以后,为了说明方便,把凡是同 $\mathrm{Cap}_e(A)$ 一样有(1),(2),(3)这三个性质的函数 $\varphi(A)$ 称作一个**广义容量**. 如果在某一个广义容量函数 φ 下,一个点集 A 的广义容量等于它的紧致子集的广义容量的上界,就说 A 是**可定 φ 容的**. 如果对任何广义容量 φ,点集 A 都是可定 φ 容的,那么说 A 是**广泛可定容的**.

一个点集如果是可列个紧致集的和集,就称作一个 K_σ 集. 可列个 K_σ 集的交集叫一个 $K_{\sigma\delta}$集. 例如开集及闭集都是 K_σ 集,因此也都是 $K_{\sigma\delta}$集. 可列个开集的交集(称作 G_δ 集)以及可列个闭集的

和集(称作 F_σ 集)都是 $K_{\sigma\delta}$集.

引理 1 $K_{\sigma\delta}$集是广泛可定容的.

证明 假定 $A=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$ 是一个 $K_{\sigma\delta}$ 集,这里 $A_i=\bigcup_{j=1}^{\infty}A_i^j$,每个 A_i^j 都是紧致集,并且关于 j 单调增加. 又假定 φ 是一个广义容量函数. $(A_1^m\cap A)$ 关于 m 单调增加,并且 $A=\bigcup(A_1^m\cap A)$,因此,由性质(2)得到

$$\sup_m \varphi(A_1^m\cap A)=\varphi(A).$$

因此,对任意一个数 $a<\varphi(A)$,存在一个正整数 q_1,使 $\varphi(A_1^{q_1}\cap A)>a$. 由同样的理由,又存在一个正整数 q_2,使 $\varphi(A_2^{q_2}\cap A_1^{q_1}\cap A)>a$. 由归纳法知道存在一列正整数 $\{q_m\}$,使对每个 q_m,

$$\varphi(A_m^{q_m}\cap A_{m-1}^{q_{m-1}}\cap\cdots\cap A_1^{q_1}\cap A)>a.$$

因此,对每个 q_m(注意 $A_k^{q_k}$ 紧致),

$$\varphi(A_m^{q_m}\cap A_{m-1}^{q_{m-1}}\cap\cdots\cap A_1^{q_1})>a.$$

所以由性质(3)得到

$$\varphi\Big(\bigcap_k A_k^{q_k}\Big)\geqslant a.$$

可是 $\bigcap_k A_k^{q_k}$ 是 A 的紧致子集,所以 A 的紧致子集的广义容量的上界不比 a 小. 所以 A 是可定 φ 容的. ▌

广义容量的概念可以推广到一般拓扑空间的子集去. 上面的引理 1 显然仍旧成立. 还可以证明

引理 2 假定 Ω_0 是一个 Hausdorff 空间,有一个连续映射 f 把 Ω_0 映入另一个 Hausdorff 空间 Ω,φ 是 Ω 的子集的一个广义容量函数,那么对 Ω_0 的子集 A,$\psi(A)=\varphi(f(A))$ 是一个广义容量,并且如果 A 是可定 ψ 容的,那么 $f(A)$ 是可定 φ 容的.

证明 ψ 有性质(1),(2)是显然的. 现在证 ψ 满足性质(3). 假定 $\{K_m\}$ 是一列单调减小的 Ω_0 的不空紧致子集,我们先证明

$$f\Big(\bigcap_m K_m\Big)=\bigcap_m f(K_m). \tag{4.2.1}$$

因为对任何一点 $P \in \bigcap_m f(K_m)$，$f^{-1}(\{P\})$ 是 Ω_0 的闭子集[①]，所以 $\{f^{-1}(\{P\}) \cap K_m\}$ 是 Ω_0 的一列单调减小的不空紧致子集. 所以 $f^{-1}(\{P\}) \cap \bigcap_m K_m \neq \varnothing$，也就是存在 $Q \in \bigcap_m K_m$，使 $f(Q) = P$. 因此，$f\left(\bigcap_m K_m\right) \supseteq \bigcap_m f(K_m)$. 另外一方面，$\bigcap_m f(K_m) \supseteq f\left(\bigcap_m K_m\right)$ 是显然的，所以(4.2.1)成立.

(4.2.1)既然成立，就得到

$$\psi\left(\bigcap_m K_m\right) = \varphi\left(f\left(\bigcap_m K_m\right)\right) = \varphi\left(\bigcap_m f(K_m)\right)$$
$$= \inf \varphi(f(K_m)) = \inf \psi(K_m).$$

因此 ψ 满足性质(3). 这样，我们就证明了 ψ 是 Ω_0 上的广义容量函数.

现在假定 A 是 Ω_0 的一个可定 ψ 容的子集，那么对任意的数 $a < \psi(A) = \varphi(f(A))$，存在一个紧致集 $D \subseteq A$，使

$$a < \psi(D) = \varphi(f(D)),$$

所以 $f(A)$是可定 φ 容的. ▌

一个紧致空间的 $K_{\sigma\delta}$子集在一个 Hausdorff 空间 Ω 中的连续像叫 **K 分析集**. 这比 Lusin 所定义的分析集更一般，分析集事实上是紧致尺度空间的子 G_δ 集在尺度空间中的连续像(见 W. Sierpinski, General Topology, the University of Toronto Press, 1952.).

定理 4.2.1 Hausdorff 空间 Ω 的 K_σ 子集的 K 分析子集广泛可定容.

证明 先假定 A 是 Ω 的一个紧致子集的 K 分析子集. 这时候不妨假定 Ω 本身紧致. 假定 A 是紧致空间 B_0 的 $K_{\sigma\delta}$子集 B 在连续映射 f 下的像，那么 $\Gamma = \{(P, f(P)) \mid P \in B\}$ 是乘积空间 $B \times$

---

① 因为$\{P\}$ 是 Ω 的闭子集. 这可以这样看：$\{P\}$ 的余集 $C(\{P\})$ 的每一点都有一个邻域不包含 P，因此 $C(\{P\})$ 是这些邻域的和集，因此 $C(\{P\})$ 开.

Ω 的相对闭子集. 所以 $\Gamma=\bar{\Gamma}$,$\bar{\Gamma}$ 表示 Γ 在 $B\times\Omega$ 的拓扑下的包. 现在 $B\times\Omega$ 是 $B_0\times\Omega$ 的 $K_{\sigma\delta}$子集,Γ 是紧致空间 $B_0\times\Omega$ 的闭子集,所以也是紧致的. 因此 Γ 是 $B_0\times\Omega$ 中的 $K_{\sigma\delta}$集,因此广泛可定容. 现在 A 是 Γ 在 Ω 中的投影,所以由引理 2,A 广泛可定容.

一般,假定

$$A\subseteq\bigcup_m K_m\subseteq\Omega,$$

K_m 是 Ω 的紧致子集,关于 m 单调增加,那么因为 $A=\bigcup_m(A\cap K_m)$, 对任何广义容量函数 φ,

$$\varphi(A)=\sup_m\varphi(A\cap K_m).$$

现在 $A\cap K_m$ 是紧致集 K_m 的 K 分析子集,所以由前面的证明,它可广泛定容. 所以

$$\varphi(A\cap K_m)=\sup\varphi(C),$$

这里 sup 是关于 $A\cap K_m$ 的全体紧致子集 C 取的. 因此,A 可定 φ 容. φ 是任意的,所以 A 广泛可定容. ▌

$\boldsymbol{E}^n$ 是一个 K_σ 空间,所以 $\boldsymbol{E}^n$ 的 K 分析子集都是广泛可定容的. 特别,$\boldsymbol{E}^n$ 的分析子集是广泛可定容的. 更特别,$\boldsymbol{E}^n$ 的 Borel 子集是广泛可定容的. ①

习　题

假定 A 是 $\boldsymbol{E}^2$ 的一个有界子集,直径小于 d. 把

$$C_{li}=\sup\{C_l(K)\mid K \text{ 是 } A \text{ 的紧致子集}\},$$

$$C_{le}=\inf\{C_{li}(U)\mid U \text{ 是 } A \text{ 的邻域}\}$$

分别叫做 A 的**内、外对数容量**,这里 $C_l(K)$ 表示 K 的对数容量. 又把 A 的内、外 Wiener 容量分别记作 C_{wi} 及 C_{we}. 用 d 作为所考虑的

---

① 尺度空间的(B)子集一定是分析集. Souslin 证明:一个完备的有可列基的尺度空间的子集 A 是(B)子集的充分而且必要的条件是 A 和 $C(A)$都是分析集. 关于这些知识可以看 W. Sierpinski 的 General Topology (the University of Toronto Press, 1952.)第七章的介绍.

改良对数位势的核里的 $2R$. 证明：

(1) $C_{wi} = \left(\log_e \dfrac{d}{C_{li}}\right)^{-1}$, $C_{we} = \left(\log_e \dfrac{d}{C_{le}}\right)^{-1}$,

$C_{li} = de^{-\frac{1}{C_{wi}}}$, $C_{le} = de^{-\frac{1}{C_{we}}}$.

(2) A 在 Wiener 容量意义下可定容的充分而且必要的条件是 $C_{li} = C_{le}$.

§4.3 零容集及极大值原理

$E^n(n \geqslant 2)$的子集，当 $n=2$ 时还假定有界，如果相对于 E^n 的内容量等于 0 或者外容量等于 0，就分别称为相对于 E^n 的**零内容集**或者**零外容集**. 当 $n=2$ 时，那么相对于 E^2 的内、外容量可以理解为内、外 Wiener 容量，也可以理解为 §4.2 习题所说的内、外对数容量. 可以看到这不会影响上面定义的内容，因为 $C_{wi} = 0$ 与 $C_{li} = 0$ 等价，而 $C_{we} = 0$ 与 $C_{le} = 0$ 等价.

当然，也可以在相对于开球的意义下定义零内容集及零外容集. 不过，由于 E^n 的紧致子集是否零容并不因所参考的是 E^n 或者是 E^n 的哪一个开子球而有所不同，E^n 的一般有界子集内容量或外容量等于 0 的性质也是跟这种不同的参考无关的. 因此，零内容或者零外容的概念没有必要相对于哪个开球来说. 但是要注意，这种概念跟所参考的 E^n 的维数 n 却有很大关系. 比方由 §4.1 习题 4 可以看到，直线段相对于包含它的一个平面 E^2 不是零容的，而相对于包含它的三维空间 E^3 却是零容的(见下面 §4.4).

此外，一个点集的外容量等于 0 的话，内容量也一定是 0. 所以零外容集就是容量等于 0 的点集. 因此，零外容集以后也称为**零容集**. 对 E^n 的(B)子集来说，这概念跟 §3.4 所说的定义是一致的. 事实上，如果一个(B)集 A 的容量等于 0，那么 A 的任何一个紧致子集的容量等于 0，因此由定理 4.1.6 知道 A 的任何一个紧致子集在任何一个能量有限的 Radon 测度下是零集. 所以 A 自己

也这样，也就是 A 按 §3.4 的定义是零容的. 反过来，如果 E^n 的 (B)子集 A 按 §3.4 的定义是零容的，那么 A 在任何能量有限的 Radon 测度下是零集，因此 A 的任何紧致子集的容量等于 0，也就是 A 的内容量等于 0. A 是可定容的，所以 A 的容量等于 0.

以后，如果一个事实除了一个点集的一个零内容子集以外对这点集的每一点都成立，就说这事实在这点集里**近乎处处**[1]成立. 如果上面的"零内容"换为"零(外)容"，那么仍旧说这事实在这点集里**似乎处处**成立.

零容集的重要意义从 §3.4 以来已经可以看到了. 正是由于似乎处处成立的概念使我们能够建立凌驾原理、扫除法等等一般的基本原理. 位势论里还有许多重要的定理都跟零容集的特殊性质有关. 这一节，我们先对零容集作比较深入的讨论.

我们曾经说过，E^n 的子集的零容性跟所参考的开球无关，尽管内、外容量一般是相对于 E^n 或者 E^n 的某个子开球来说的. 下面的定理 4.3.1 给这事实一个另外的说明.

定理 4.3.1 (H. Cartan) 当 $n \geqslant 2$ 时，E^n 的一个有界子集 A 零容的充分而且必要的条件是存在一个在 A 的一个邻域里上调和的函数 u，在 A 里处处等于 $+\infty$.

证明 *充分性* 如果所说的 u 存在，那么在 A 的一个有界邻域 V 里，u 是一个正测度 μ 的位势 U^μ 及一个调和函数的和. 因此 U^μ 在 A 里必须处处等于 $+\infty$. 对任何一个正数 a，令

$$W_a = \{P \mid U^\mu(P) > a, P \in V\},$$

那么 W_a 是 A 的一个有界邻域. 对 W_a 的任何一个紧致子集 K，假定 K 的容量分布是 γ，那么

$$\gamma(K) = \int 1 \mathrm{d}\gamma \leqslant \int \frac{U^\mu}{a} \mathrm{d}\gamma = \frac{1}{a}\int U^\gamma \mathrm{d}\mu \leqslant \frac{1}{a}\mu(E^n).$$

因为 μ 的支柱包含在紧致集 $\overline{V}$ 里，所以 $\mu(E^n)$有限，因此

[1] 这概念是 H. Cartan 引进来的，他用的是法文"à peu prèsque partout".

$$\mathrm{Cap}_e(A) \leqslant \inf_a \mathrm{Cap}(W_a) = \inf_a \sup_K \gamma(K) \leqslant \inf_a \frac{\mu(E^n)}{a} = 0.$$

必要性 如果 A 零容，那么 A 有一列单调减小的邻域 W_m，使 $\mathrm{Cap}(W_m) \leqslant 1/m^2, m = 1,2,\cdots$. 把 W_m 的容量分布记为 γ_m，那么

$$\gamma_m(E^n) = \gamma_m(W_m) = \mathrm{Cap}(W_m) \leqslant 1/m^2,$$

$$U^{\gamma_m}(P) = 1, \quad P \in A.$$

令 $\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m$，那么

$$U^{\mu}(P) = \sum_{m=1}^{\infty} U^{\gamma_m}(P) = \sum_{m=1}^{\infty} 1 = +\infty, \quad P \in A.$$

此外，对 A 的任何一个外点 Q，可以取 m_0 充分大使当 $m > m_0$ 时，Q 到 $\overline{W}_m$ 的距离大于一个正数 b. 于是

$$U^{\mu}(Q) = \sum_{m=1}^{m_0} U^{\gamma_m}(Q) + \sum_{m=m_0+1}^{\infty} U^{\gamma_m}(Q).$$

等号右边第一个和里每一项都不超过 1，因此第一个和不超过 m_0. 因而得到

$$U^{\mu}(Q) \leqslant m_0 + \sum_{m=m_0+1}^{\infty} U^{\gamma_m}(Q)$$

$$\leqslant \begin{cases} m_0 + \sum\limits_{m=m_0+1}^{\infty} \int b^{2-n} \mathrm{d}\gamma_m, & n > 2, \\ m_0 + \sum\limits_{m=m_0+1}^{\infty} \int \log_e \dfrac{2R}{b} \mathrm{d}\gamma_m, & n = 2. \end{cases}$$

因此，

$$U^{\mu}(Q) \leqslant m_0 + c \sum \gamma_m(E^n) \leqslant m_0 + c \sum \frac{1}{m^2} < +\infty,$$

这里假定 $K(O,R) \supset \overline{W}_1$. 这说明 μ 是正测度并且 U^{μ} 是不恒等于 $+\infty$ 的位势. 所以令 $u = U^{\mu}$ 就得到了条件里所说的那样的函数 u.

∎

我们注意，当 $n > 2$ 的时候，E^n 的一个无界子集 A 零容或者零内容的充分而且必要的条件分别是：A 是可列个有界零容集或者

有界零内容集的和集.条件的充分性是显然的,必要性可以由 $A=\bigcup_{m=1}^{\infty}(A\cap K(O,m))$ 看到.现在类似地规定:$\boldsymbol{E}^2$ 的无界子集如果是可列个有界零容集(或者有界零内容集)的和集,就称为**零容集**(或者**零内容集**).这样,定理 4.3.1 所说的条件的充分性就立刻可以推广到无界零容集上来.可以把这些事实写成:

推论 1 当 $n\geqslant 2$ 时,如果 $\boldsymbol{E}^n$ 的一个子集 A 的一个邻域里存在一个上调和函数在 A 里处处等于 $+\infty$,那么 A 零容.

证明 因为根据假设,A 的任何一个有界子集都必须零容(由定理 4.3.1). ▌

为了对无界零容子集建立一个类似于定理 4.3.1 的必要的条件,我们可以直接从定理 4.3.1 的证明的后半部分来看.除了 $n=2$ 的情形由于用到 Wiener 容量分布的概念,需要 A 的邻域 W_m 有界的假设以外,A 有界的假设对证明过程是多余的.根据这个证明过程,我们实际上得到:

推论 2 当 $n\geqslant 2$ 时,如果 $\boldsymbol{E}^n$ 的子集 A 零容($n=2$ 时假定 A 有界),那么存在一个总质量有限的正 Radon 测度 μ,U_n^{μ} 在 A 里处处等于 $+\infty$,在 $\boldsymbol{E}^n\backslash\overline{A}$ 里处处有限.

证明 要证明的只是 $n=2$ 的情形下可以用 U_2^{μ} 代替 $U_2^{*\mu}$.这是因为

$$U_2^{\mu}(P)=\int\log_e\frac{2R}{r_{PQ}}\mathrm{d}\mu(e_Q)-\mu(\boldsymbol{E}^2)\log_e 2R$$
$$=U_2^{*\mu}(P)-\mu(\boldsymbol{E}^2)\log_e 2R.$$

所以,当 $P\in A$ 时,$U_2^{\mu}(P)=+\infty$,而当 $P\in\boldsymbol{E}^2\backslash\overline{A}$ 时 $U_2^{\mu}(P)<+\infty$. ▌

由推论 1 及推论 2 又得到

定理 4.3.2 假定 S 是 $\boldsymbol{E}^n$ 的子区域 Ω 的一个零容的相对闭集,$n=2$ 时还假定 S 有界,那么 $\Omega\backslash S$ 是区域.

证明 假定 $\Omega\backslash S$ 不是区域,那么 $\Omega\backslash S$ 是两个不相交的不空

开集 Ω_1 和 Ω_2 的和集. 由推论 2,存在一个函数 u,它在 Ω 里上调和而在 S 里处处等于 $+\infty$. 令

$$v(P)=\begin{cases}u(P), & \text{当 } P\in\Omega_1,\\ +\infty, & \text{当 } P\in\Omega_2\cup S,\end{cases}$$

那么 $v(P)$ 在 $\overline{\Omega}$ 里上调和,并且在 $\Omega_2\cup S$ 里处处等于 $+\infty$. 由推论 1,$\Omega_2\cup S$ 零容,因此 Ω_2 零容. 这是不可能的. ▌

根据定理 4.3.1,还可以给下调和函数的极大值原理一个重要的推广. 为了说明得详细一些,先证明一个一般的引理.

引理 1 假定 u 是把一个拓扑空间的一个开子集 Ω 映入 $\overline{R^1}$ 去的映射. 对每一点 $Q\in B(\Omega)$ 定义

$$\begin{aligned}u(Q)&=\varlimsup_{\Omega\ni P\to Q}u(P)\\&=\inf\{\sup_{P\in V\cap\overline{\Omega}\setminus\{Q\}}u(P)\,|\,V\text{ 是 }Q\text{ 的邻域}\},\end{aligned}\qquad(4.3.1)$$

那么对每一点 $Q\in B(\Omega)$,

$$u(Q)=\varlimsup_{\overline{\Omega}\ni P\to Q}u(P).\qquad(4.3.2)$$

因此,把 u 当作把 $\overline{\Omega}$ 映入 $\overline{R^1}$ 去的映射来看,它在 $B(\Omega)$ 上处处上半连续.

证明 由 $u(Q)$ 的定义式(4.3.1)知道,对每一点 $Q\in B(\Omega)$,$u(Q)\leqslant\varlimsup_{\overline{\Omega}\ni P\to Q}u(P)$. 所以要证明(4.3.2)成立,只要证明对每一点 $Q\in B(\Omega)$,下式(4.3.3)都不成立:

$$\begin{aligned}u(Q)&<\varlimsup_{\overline{\Omega}\ni P\to Q}u(P)\\&=\inf\{\sup_{P\in V\cap\overline{\Omega}\setminus\{Q\}}u(P)\,|\,V\text{ 是 }Q\text{ 的邻域}\}.\end{aligned}\qquad(4.3.3)$$

如果对某一点 $Q_0\in B(\Omega)$,(4.3.3)成立,那么存在一个正的常数 ε 使 Q_0 的所有邻域 V,下式成立:

$$u(Q_0)<\sup_{P\in V\cap\overline{\Omega}\setminus\{Q_0\}}u(P)-\varepsilon.$$

因此,对 Q_0 的每个邻域 V 都至少有一点 $P_V\in V\cap\overline{\Omega}\setminus\{Q_0\}$ 使 $u(Q_0)$

$<u(P_V)-\varepsilon$，就是 $u(P_V)>u(Q_0)+\varepsilon$.

如果 $P_V\in V\cap\Omega\backslash\{Q_0\}$，那么就把 P_V 改记为 P'_V. 如果 $P_V\in V\cap B(\Omega)\backslash\{Q_0\}$，那么由于 $u(P_V)=\overline{\lim\limits_{\Omega\ni P\to P_V}}u(P)$，存在一点 $P'_V\in V\cap\Omega$，使

$$u(P'_V)>u(P_V)-\varepsilon/2.$$

因此

$$u(P'_V)>u(Q_0)+\varepsilon/2. \tag{4.3.4}$$

因此无论怎样，对 Q_0 的每一邻域 V，总存在一点 $P'_V\in V\cap\Omega$ 使(4.3.4)成立. 因此由上极限定义知道

$$\overline{\lim_{\Omega\ni P\to Q_0}}u(P)\geqslant u(Q_0)+\varepsilon/2.$$

这跟(4.3.1)矛盾，所以不可能，因此(4.3.3)不可能成立. ▌

由引理 1，再注意到在一个紧致集里上半连续函数一定有极大值(可能是$+\infty$)这个事实，下调和函数的极大值原理就可以这样表达：

假定 u 在 E^n 的一个有界开子集 Ω 里下调和，对每点 $Q\in B(\Omega)$下式成立：

$$\overline{\lim_{\Omega\ni P\to Q_0}}u(P)\leqslant M,$$

那么 $u\leqslant M$ 在 Ω 里处处成立.

事实上，如果对每点 $Q\in B(\Omega)$，定义 $u(Q)=\overline{\lim\limits_{\Omega\ni P\to Q}}u(P)$，那么 u 就给延拓成一个在紧致集 $\overline{\Omega}$ 里上半连续的函数. u 在 $\overline{\Omega}$ 里必须有极大值在 $B(\Omega)$上取得. 由定义 u 在 $B(\Omega)$上处处不超过 M，所以 $u\leqslant M$ 在 $\overline{\Omega}$ 里处处成立.

现在我们证明这个极大值原理可以加强为下面的

定理4.3.3 假定函数 u 在 $E^n(n\geqslant2)$的一个有界开子集 Ω 里下调和并且有上界，又假定存在一个常数 M，使在 $B(\Omega)$上

$$\overline{\lim_{\Omega\ni P\to Q\in B(\Omega)}}u(P)\leqslant M \tag{4.3.5}$$

近乎处处成立，那么 $u\leqslant M$ 在 Ω 里处处成立.

证明 令

$$A=\{Q|\varlimsup_{\Omega\ni P\to Q}u(P)>M,Q\in B(\Omega)\},$$

那么 A 零内容. 令 $u_1(Q)=\varlimsup\limits_{\Omega\ni P\to Q}u(P)$，$u_1$ 作为 $Q\in B(\Omega)$ 的函数是上半连续的，所以 A 是 (B) 集. 从而 A 可定容且为零容. 因此，由推论 2 知道存在一个函数 w 在 $\bar{\Omega}$ 的一个邻域为正、上调和，在 A 里处处等于 $+\infty$，并且在 Ω 里处处有限. 对任何一个正常数 ε，$M+\varepsilon w$ 在 Ω 里为正、上调和且

$$\varliminf_{\Omega\ni P\to Q\in B(\Omega)\setminus A}(M+\varepsilon w(P))\geqslant M,$$

$$\varliminf_{\Omega\ni P\to Q\in A}(M+\varepsilon w(P))=+\infty.$$

因此由假定知道，对任何 $Q\in B(\Omega)$，

$$\varlimsup_{\Omega\ni P\to Q\in B(\Omega)}\{u(P)-(M+\varepsilon w(P))\}\leqslant 0.$$

现在 $u-(M+\varepsilon w)$ 在 Ω 里下调和，所以由这个边界性质知道对任何一点 $P_1\in\Omega$，

$$u(P_1)-(M+\varepsilon w(P_1))\leqslant 0.$$

$w(P_1)$ 有限，所以令 $\varepsilon\to 0$ 得到 $u(P_1)-M\leqslant 0$，也就是 $u(P_1)\leqslant M$.

▌

定理 4.3.3 还可以推广到无界区域上去. 为了这个目的，也为了以后应用上的方便，这里先介绍单点紧致化的概念.

假定 X 和 Y 是两个拓扑空间，Y 紧致. 如果存在一个同胚变换 f 把 X 变进 Y 去，并且 $f(X)$ 在 Y 里处处稠密，那么说 Y 是 X 的一个**紧致化或紧扩张**.

一个不紧致的拓扑空间的紧致化不是唯一的，但紧致化总是有. 有一种最简单的叫单点紧致化，是从 Riemann 的复数球面概念一般化得到的.

假定 X 是一个不紧致的拓扑空间. 把 X 及另外一点 a 一起构

成的点集 $X\cup\{a\}$ 记作 $\tilde{X}$. 规定 $\tilde{X}$ 的拓扑如下：X 的一个紧致子集在 $\tilde{X}$ 里的余集称为 a 点的一个邻域；此外，一点 $P\in X$ 在 X 的原来拓扑里的任何一个邻域仍旧看作 P 在 $\tilde{X}$ 里的一个邻域. 把 $\tilde{X}$ 看作这些邻域全体所繁殖的拓扑下的拓扑空间，这个拓扑空间称为 X 的**单点紧致化**，或 **Alexandroff 紧致化**. a 称为 $\tilde{X}$ 的 **Alexandroff 点**.

可以看到，$\tilde{X}$ 是紧致的. 事实上，假定 $\mathscr{U}$ 是 $\tilde{X}$ 的一个开覆盖族，其中 $U_1\ni a$. 由于 U_1 是开集，U_1 必须包含 a 的一个邻域. 因此，闭集 $C(U_1)$ 必须包含在 X 的一个紧致子集里. 因此 $C(U_1)$ 紧致. 这样，在 $\mathscr{U}$ 里存在有限个开集 $U_2,\cdots,U_N$ 覆盖 $C(U_1)$. 因此，

$$U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_N\supseteq U_1\cup C(U_1)=\tilde{X}.$$

所以 $\tilde{X}$ 紧致.

其次，$\overline{X}=\tilde{X}$（$\overline{X}$ 表示 X 在 $\tilde{X}$ 里的包）. 要证明这一点只要证明 $a\in\overline{X}$ 就行了. 事实上，要是 $a\notin\overline{X}$，那么 a 有一个邻域 $U\subseteq C(\overline{X})$. 这样一来，

$$\{a\}\subseteq U\subseteq C(\overline{X})\subseteq C(X)=\{a\}.$$

所以，$U=\{a\}$ 而 $C(U)=C(\{a\})=X$. 但是由 a 的邻域的定义，$C(U)$ 必须紧致. 所以 X 紧致，这是矛盾的.

这就说明 X 的单点紧致化 $\tilde{X}$ 的确是 X 的一个紧致化. 此外，容易看到 X 的任何两个单点紧致化是同胚的. 在这意义下我们说不紧致的拓扑空间的单点紧致化存在且唯一.

以后我们都用 $\tilde{\boldsymbol{E}}^n$ 表示 $\boldsymbol{E}^n$ 的单点紧致化，它里面的 Alexandroff 点称为**无限远点**，记作 ∞. 为了便于区别，$\tilde{\boldsymbol{E}}^n$ 的子集 A 在 $\tilde{\boldsymbol{E}}^n$ 里的包记作 $\tilde{A}$，边界记作 $\tilde{B}(A)$ 等等.

通过这个概念，可以从定理 4.3.3 推出

推论 3 假定 u 在 $\boldsymbol{E}^n$ 的一个无界开子集 Ω 里有上界、下调和、并且存在一个常数 M，使

$$\overline{\lim_{\Omega\ni P\to\infty}}\ u(P)\leqslant M,\tag{4.3.6}$$

$$\overline{\lim_{\Omega \ni P \to Q \in B(\Omega)}} u(P) \leqslant M \tag{4.3.7}$$

在 $B(\Omega)$上近乎处处成立，那么 $u \leqslant M$ 在 Ω 里处处成立.

证明 由(4.3.6)知道，对任何一个正数 ε，∞有一个邻域 $\widetilde{U}$ 使下式成立：

$$u(P) < M + \varepsilon, \quad P \in \widetilde{U} \cap \Omega. \tag{4.3.8}$$

这样，对有界开集 $\Omega_1 = C(\widetilde{U}) \cap \Omega$ 来说，

$$\overline{\lim_{\Omega_1 \ni P \to Q \in B(\Omega_1)}} u(P) < M + \varepsilon$$

在 $B(\Omega_1)$上近乎处处成立. 因此由定理 4.3.3 得到 $u \leqslant M + \varepsilon$ 在 Ω_1 里处处成立. 再由(4.3.8)，又得到 $u \leqslant M + \varepsilon$ 在 Ω 里处处成立. ε 是任意的，所以 $u \leqslant M$ 在 Ω 里处处成立. ▌

定理 4.3.3 和推论 3 还可以概括成下面的

推论 4 假定 u 在 E^n 在一个开子集 Ω 里有上界并且下调和，v 在 Ω 有下界并且上调和. 再假定除了 $\widetilde{B}(\Omega) \setminus \{\infty\}$的一个零内容子集外，下式处处成立：

$$\overline{\lim_{\Omega \ni P \to Q \in \widetilde{B}(\Omega)}} (u(P) - v(P)) \leqslant 0,$$

那么 $u \leqslant v$ 在 Ω 里处处成立.

证明 令 $w = u - v$，那么 w 在 Ω 里有上界并且下调和，因此由假设及定理 4.3.3、推论 3 得到 $u - v \leqslant 0$ 在 Ω 里处处成立. ▌

定理 4.3.3 和推论 3、推论 4 在下一章里有重要的应用，并且还要进一步加以推广. 这里我们先利用它们来推广两个关于调和函数列的收敛定理.

定理 4.3.4 假定$\{u_m\}$是一列在 E^n 的子区域 Ω 里有界并且调和的函数，且除了 $\widetilde{B}(\Omega) \setminus \{\infty\}$的一个零内容子集外下式处处成立：

$$\overline{\lim_{\Omega \ni P \to Q \in \widetilde{B}(\Omega)}} (u_m(P) - u_{m+1}(P)) \leqslant 0, \quad m = 1, 2, \cdots,$$

那么 $\lim\limits_{m \to \infty} u_m$ 要不是在 Ω 里调和就是恒等于$+\infty$.

证明 由推论 4，$u_m \leqslant u_{m+1}(m=1,2,\cdots)$在 Ω 里处处成立. 因此，$\{u_m\}$单调增加. 由 Harnack 定理得到定理的结论. ▍

定理 4.3.5 假定$\{u_m\}$是一列在 $\boldsymbol{E}^n$ 的开子集 Ω 里有界并且调和的函数. 再假定除了 $\widetilde{B}(\Omega)\backslash\{\infty\}$的一个零内容子集 e 外，下面极限处处存在并且有限：

$$\lim_{\Omega \ni P \to Q \in \widetilde{B}(\Omega)} u_m(P) = f_m(Q), \quad m = 1,2,\cdots,$$

而且$\{f_m(Q)\}$在 $\widetilde{B}(\Omega)\backslash e$ 里一致收敛，那么$\{u_m\}$在 Ω 里一致收敛于一个调和函数.

证明 对任何正数 ε，存在一个 N，使

$$-\varepsilon < f_m(Q) - f_n(Q) < \varepsilon, \quad m > n > N$$

在 $\widetilde{B}(\Omega)\backslash e$ 里处处成立. 因此由推论 4 知道

$$-\varepsilon < u_m - u_n < \varepsilon, \quad m > n > N$$

在 Ω 里处处成立. 因此，$\{u_m\}$在 Ω 里一致收敛，它的极限当然调和. ▍

最后注意：推论 3、推论 4，定理 4.3.4、定理 4.3.5 里的假设当 $n=2$ 并且 $C(\Omega)$不零容时可以减轻. 我们有

推论 5 假定 $n=2$ 并且 $C(\Omega)$不零容，那么推论 3 的假设里的(4.3.6)可以省；推论 4、定理 4.3.4 和定理 4.3.5 的假设里的"$\widetilde{B}(\Omega)\backslash\{\infty\}$"可以改为"$\widetilde{B}(\Omega)$".

证明 把 $C(\Omega)$的一个紧致子集 C 的对数平衡分布记作 ω，那么 U_2^ω 在 C 里似乎处处等于一个常数 L，并且在 $\boldsymbol{E}^2$ 里处处不超过 L. 所以，如果令

$$v = -L + U_2^\omega,$$

那么 v 在 Ω 里调和、为负，并且

$$\lim_{P \to \infty} v(P) = -\infty.$$

假定 u 在 Ω 里有上界、下调和，并且满足(4.3.7)，也就是 u 满足推论 3 里除了(4.3.6)以外所有的假设的话，那么对任何正数 ε，$u+\varepsilon v$ 满足推论 3 的所有的假设，因为

$$\overline{\lim_{\Omega \ni P \to \infty}} (u(P) + \varepsilon v(P)) = -\infty \leqslant M,$$

$$\overline{\lim_{\Omega \ni P \to Q \in B(\Omega)}} (u(P) + \varepsilon v(P)) \leqslant \overline{\lim_{\Omega \ni P \to Q \in B(\Omega)}} u(P) \leqslant M$$

在 $B(\Omega)$上近乎处处成立. 所以由推论 3 得到:

$$u(P) + \varepsilon v(P) \leqslant M, \quad P \in \Omega.$$

令 $\varepsilon \to 0$ 就得到 $u(P) \leqslant M, P \in \Omega$. 这就证明了推论 5 的前半部分.

推论 5 的后半部分是前半部分的明显的推论. ∎

习　题

1. 一个在区域 Ω 里有界的调和函数 u 如果在边界的单点紧致化 $\tilde{B}(\Omega)$上的极限值(边界值)似乎处处等于常数, 那么 u 恒等于常数.

2. 用 z 表示复变数. 证明 $u(z) = \mathrm{Re}\,\dfrac{1+z}{1-z}$ 在开单位圆盘 $|z| < 1$ 里调和, 并且在边界 $|z| = 1$ 上似乎处处有极限值 0. 这个结果跟习题 1 矛盾吗? 又 $v(z) = \mathrm{Im} z$ 在上半平面调和, 并且在实轴上处处有极限值 0, 这事实跟习题 1 矛盾吗?

§ 4.4　点集的肥瘦

我们已经说过, 一个点集的外容量位势(不论是相对于一个开球的或者是改良对数位势下的)在这点集里似乎处处等于 1, 而在这点集的内部处处等于 1. 这一节要研究这个外容量位势究竟在这点集的哪些点不等于 1. 对内容量位势也有同样的问题.

我们先从 Brelot 的点集肥瘦的概念谈起. 为了简便, 在这一节里 A' 这样的记号都表示点集 A 的导集.

定义 1　假定一个点集 $A \subseteq E^n$, 点 $Q \in E^n$. 如果 $Q \notin A'$, 或者虽然 $Q \in A'$, 可是存在一个函数 v 在 Q 的一个邻域 D 里上调和而且

$$\underline{\lim_{A \ni P \to Q}} v(P) > v(Q), \tag{4.4.1}$$

那么就说 A 在 Q 瘦，$C(A)$在 Q 肥①.

由定义 1 知道，A 在一点 Q 瘦是由 A 在 Q 的一个邻域里的情形决定的. 而且由定义立刻可以得到

定理 4.4.1 假定 $A \subseteq \boldsymbol{E}^n$，在一点 $Q \in \boldsymbol{E}^n$ 瘦，那么 A 的任何一个子集都在 Q 瘦. 假定 $\boldsymbol{E}^n$ 的有限个子集 $A_1, \cdots, A_k$ 都在一点 $Q \in \boldsymbol{E}^n$ 瘦，那么 $A_1 \cup \cdots \cup A_k$ 在 Q 也瘦.

我们再证明

定理 4.4.2 $A \subseteq \boldsymbol{E}^n$ 在一点 $Q \in \boldsymbol{E}^n$ 瘦的充分而且必要的条件是 $A \backslash \{Q\}$ 有一个邻域在 Q 瘦.

证明 条件的充分性用不到证了，现在只证必要性. 要是 $Q \notin A'$，那么这条件当然成立；要是 $Q \in A'$，那么存在一个像定义 1 所说的函数 v. 取实数 h 使

$$\varliminf_{A \ni P \to Q} v(P) > h > v(Q). \tag{4.4.2}$$

由于 v 在 D 里下半连续，点集 $G = \{P \mid v(P) > h, P \in D\}$ 是开的，并且

$$\varliminf_{G \ni P \to Q} v(P) \geqslant h > v(Q).$$

所以 G 在 Q 瘦.

另外一方面，由(4.4.2)知道 Q 有一个邻域 W 使在 $\overline{W} \cap A \backslash \{Q\}$ 里 $v > h$ 成立. 因此，$G \supseteq \overline{W} \cap A \backslash \{Q\}$. 因此，$G \cup C(\overline{W}) \supseteq A \backslash \{Q\}$，$Q$ 不是 $C(\overline{W})$的聚点，所以 $C(\overline{W})$在 Q 瘦. 因此，$G \cup C(\overline{W})$就是像条件所说的邻域. ▌

根据定理 4.4.2 可以得到点集瘦的一个必要条件：

定理 4.4.3 假定 $A \subseteq \boldsymbol{E}^n$ 在一点 Q 瘦，那么

$$\lim_{r \to 0} \varepsilon_{Q,r}^{*}(A) = 0, \tag{4.4.3}$$

这里 $\varepsilon_{Q,r}^{*}$表示由 $\varepsilon_{Q,r}$扩张得到的外测度.

---

① 瘦(effilé)是 M. Brelot(J. de Math.，1940)首创的概念. 为了说话方便，这里添上"肥"的概念.

证明 要是$Q \notin A'$，那么(4.4.3)当然成立. 要是$Q \in A'$，那么存在函数v使(4.4.1)成立. 取常数h使

$$\lim_{A \cap D \ni P \to Q} v(P) > h > v(Q),$$

那么存在一个常数r_0使

$$v(P) > h > v(Q), \quad P \in A \cap K(Q, r_0) \setminus \{Q\}.$$

因此，$G = \{P \mid v(P) > h\}$是$A \cap K(Q, r_0) \setminus \{Q\}$的一个邻域.

假定(4.4.3)不成立，那么一定存在正数d和一列收敛于0的正数$\{r_m\}$，使

$$\varepsilon_{Q, r_m}(G) > d.$$

因此由v的上调和性得到

$$\begin{aligned}
v(Q) &\geq \int v \mathrm{d}\varepsilon_{Q, r_m} = \int_G v \mathrm{d}\varepsilon_{Q, r_m} + \int_{C(G)} v \mathrm{d}\varepsilon_{Q, r_m} \\
&\geq h \varepsilon_{Q, r_m}(G) + \varepsilon_{Q, r_m}(C(G)) \inf_{P \in K(Q, r_m) \setminus \{Q\}} v(P) \\
&\geq hd + (1-d) v(Q) + \varepsilon_{Q, r_m}(C(G)) \left[\inf_{P \in K(Q, r_m) \setminus \{Q\}} v(P) - v(Q) \right] \\
&\to hd + (1-d) v(Q) > v(Q), \quad m \to \infty.
\end{aligned}$$

这是不可能的，因此(4.4.3)成立. ∎

由定理4.4.3知道E^n的一个子超圆锥体在它的顶点不瘦. E^n的子集如果在一点瘦的话，那么它在这点一定比超圆锥的顶还尖得多. 我们举有名的Lebesgue刺作例子.

例1(**Lebesgue刺**) 在E^3中取直角坐标系，任意点的坐标记作(x, y, z). 把xy平面上的曲线$y = \mathrm{e}^{-1/x}(x > 0)$绕$x$轴的旋转面所包围的闭子区域叫**Lebesgue刺**，它在原点O是瘦的.

事实上，在区间$[0,1]$的每一点x用x当线性密度得到一个正测度μ. 对任何一个(B)集$e \subset [0,1]$，

$$\mu(e) = \int_e x \mathrm{d}x,$$

那么

$$U^{\mu}(0,0,0) = \int_0^1 x^{-1} x \mathrm{d}x = 1.$$

而在所说的 Lebesgue 刺里任意一点(x_0, y_0, z_0)，有

$$\begin{aligned} U^{\mu}(x_0, y_0, z_0) &= \int_0^1 ((x - x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2)^{-1/2} x \mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_0^1 ((x - x_0)^2 + e^{-2/x_0})^{-1/2} x \mathrm{d}x \\ &= x_0 \log_e \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{-2/x_0} + x_0^2} + x_0}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2/x_0} + (1 - x_0)^2} - (1 - x_0)} \\ &\quad + \sqrt{\mathrm{e}^{-2/x_0} + (1 - x_0)^2} - \sqrt{\mathrm{e}^{-2/x_0} + x_0^2} \\ &\to 2 + 1 + 0 = 3 > 1 = U^{\mu}(0,0,0), \quad x_0 \to 0. \end{aligned}$$

所以定义 1 的条件具备.

可以看到，当 $\lambda(x) \sim k/(2x)$ 时，$y = \mathrm{e}^{-\lambda(x)}(x > 0)$ 绕 x 轴的旋转面所包围的旋转体在尖端也是瘦的，一般也都叫做 **Lebesgue 刺**.

注意：$\boldsymbol{E}^n$ 的子集瘦不瘦跟空间维数 n 有关. 比方一个直线段当作 $\boldsymbol{E}^3$ 的子集来看，由于看作一个 Lebesgue 刺的子集，在它的端点是瘦的. 这一点也可以由定义 1 直接说明. 利用前边的正测度 μ，对 x 轴上任意一点$(a,0,0)$，$a \in (0,1]$有

$$U^{\mu}(a,0,0) = \int_0^1 |x - a|^{-1} x \mathrm{d}x = \infty.$$

这首先表示 x 轴上的闭区间$[0,1]$当作 $\boldsymbol{E}^3$ 的子集是瘦的. 由于坐标轴和原点可以任意取，我们看到直线段当作 $\boldsymbol{E}^3$ 的子集，在它的端点是瘦的. 但当作 $\boldsymbol{E}^2$ 的子集时，在端点却不瘦，见下面的例 2.

我们再回顾一下定义. 在一点的一个邻域里上调和的函数不能等于 $-\infty$，并且是下半连续的. 所以在 Q 的一个充分小的邻域中有下界，因此是一个正测度的位势及一个调和函数的和. 调和函数在 Q 当然是连续的，因此上面的定义中的上调和函数可以改作正测度的位势. 于是得到

定理 4.4.4 E^n 的一个点集 A 在 A 的一个聚点 Q_0 瘦的充分而且必要的条件是存在一个正测度的位势 U_n^μ 满足

$$U_n^\mu(Q_0) < \varliminf_{A \ni Q \to Q_0} U_n^\mu(Q). \tag{4.4.4}$$

由定理 4.4.4 还可以得到

推论 1 E^n 的一个点集 A 在 A 的一个聚点 Q_0 瘦的充分而且必要的条件是存在一个正测度的位势 U_n^ν 满足

$$\varliminf_{A \ni Q \to Q_0} U_n^\nu(Q) = \infty, \quad U_n^\nu(Q_0) < \infty. \tag{4.4.5}$$

证明 充分性是显然的，只需要证明必要性. 根据定理4.4.4，存在一个正测度 μ 满足(4.4.4). 由于

$$U^\mu(Q_0) = \int U^{\varepsilon_{Q_0}} d\mu < \infty,$$

根据积分收敛的定义，对任何正整数 m，存在正数 d_m，使

$$U^{\mu|K(Q_0,d_m)}(Q_0) < \frac{1}{m^2}.$$

令 $V_j = \sum_{m=1}^{j} U^{\mu|K(Q_0,d_m)}$. 假定

$$\varliminf_{A \ni Q \to Q_0} U^\mu(Q) - U^\mu(Q_0) = d > 0,$$

那么由于

$$U^\mu(Q) - U^{\mu|K(Q_0,d_m)}(Q) = U^{\mu|C(K(Q_0,d_m))}(Q)$$

在 Q_0 调和，我们得到

$$\varliminf_{A \ni Q \to Q_0} V_j(Q) - V_j(Q_0) \geq jd.$$

如果令 $\gamma = \sum_{m=1}^{\infty} \mu|K(Q_0,d_m)$，那么

$$U^\gamma(Q_0) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty,$$

$$\varliminf_{A \ni Q \to Q_0} U^\gamma(Q) = \infty. \quad \blacksquare$$

由推论 1，还可以得到

定理 4.4.5 假定 E^n 的子集 A 在一点 Q_0 瘦，一个映射 f 把 Q_0 的一个邻域 D 映入 E^n 去，对任何 $Q\in D, Q'\in D$，

$$r_{f(Q)f(Q')} \leqslant r_{QQ'}, \tag{4.4.6}$$

$$r_{f(Q)f(Q_0)} = r_{QQ_0}, \tag{4.4.7}$$

那么点集 $f(A)$ 在点 $f(Q_0)$ 瘦.

证明 如果 Q_0 不是 A 的聚点，那么由 f 的性质(4.4.7)知道，$f(Q_0)$ 不是 $f(A)$ 的聚点.

如果 Q_0 是 A 的聚点，而 A 在 Q_0 瘦，那么由推论 1 存在一个满足(4.4.5)的正测度 γ. 由于 $U^{\gamma|C(D)}$ 在 Q_0 连续，$\gamma|D$ 必须满足(4.4.5). 所以不妨假定 γ 的全部质量包含在 D 里.

由(4.4.6)，f 是连续映射. 所以 $f(D)$ 的任何一个(B)子集 $f(e)$ 的原像 e 是 D 的(B)子集. 定义

$$\lambda(f(e)) = \gamma(e)$$

得到一个测度 λ. 如果 E^n 的维数 $n>2$，那么由(4.4.5)及(4.4.6)得到

$$U^\lambda(f(Q)) = \int r^{2-n}_{f(Q)f(Q')}\mathrm{d}\lambda(f(e_{Q'}))$$

$$\geqslant \int r^{2-n}_{QQ'}\mathrm{d}\gamma(e_{Q'}) = U^\gamma(Q),$$

$$U^\lambda(f(Q_0)) = U^\gamma(Q_0),$$

$$\varliminf_{f(A)\ni f(Q)\to f(Q_0)} U^\lambda(f(Q)) \geqslant \varliminf_{A\ni Q\to Q_0} U^\gamma(Q) = \infty.$$

因此，$f(A)$ 在 $f(Q_0)$ 瘦. 如果 $n=2$，那么可以用 $-\log_e r_{f(Q)f(Q')}$ 代替上面的 $r^{2-n}_{f(Q)f(Q')}$ 得到同样的结论. ▌

下面说明肥瘦的概念同外容量位势的关系. 先证明

引理 1 E^n 的零容集 A 一定在每一点都瘦.

证明 只用证明一个零容集 A 一定在每一点 $Q_0\in A'$ 都瘦就行了. 由定理 4.3.1，存在一个总质量有限的正测度 μ 使 U^μ 在 A 里处处等于 $+\infty$. 用每一点 $P\in A\setminus\{Q_0\}$ 为中心作一个闭球不包含

Q_0. 由 Lindelöf 定理，存在可列个这种闭球$\overline{K(P_i,r_i)}$($i=1,2,\cdots$)覆盖 $A\backslash\{Q_0\}$. 令

$$\mu|\overline{K(P_i,r_i)}=\mu_i,$$

那么

$$U^{\mu_i}(Q_0)<+\infty,$$

$$U^{\mu_i}(P)=+\infty,\quad P\in A\cap\overline{K(P_i,r_i)}\backslash\{Q_0\}.$$

取正常数 c_i 使 $c_iU^{\mu_i}(Q_0)<1/2^i$，那么

$$U^{\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_i\mu_i}(Q_0)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\infty,$$

$$U^{\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_i\mu_i}(P)=+\infty,\quad P\in A\backslash\{Q_0\}.$$

因此，A 在 Q_0 是瘦的. ▌

定理 4.4.6 E^n 的子集 A 在一点 Q_0 瘦的充分而且必要条件是 Q_0 有一个邻域 D 使 $A\cap D$ 的外容量位势在 Q_0 小于 1. 这里外容量位势无论相对于 E^n 的哪一个开子球都可以. 特别，$n=2$ 的时候，可以在改良对数位势的意义下理解.

证明 *充分性* 由于 $A\cap D$ 的外容量分布是包含 $A\cap D$ 的一列单调减小的开集的容量分布的强极限，因此也是弱极限. 因此这列开集的容量位势依任何一个能量有限的测度收敛于 $A\cap D$ 的外容量位势. 由于任何一个包含 $A\cap D$ 的开集的容量位势在 $A\cap D$ 里处处等于 1，$A\cap D$ 的外容量位势必须在 $A\cap D$ 里至多除一个零容集 e 外处处等于 1. 假如定理所说的条件成立，那么 $A\cap D$ 的外容量位势在 $A\cap D\backslash e$ 里处处等于 1，而在 Q_0 小于 1. 如果 Q_0 是 $A\backslash e$ 的聚点，那么这说明 $A\backslash e$ 在 Q_0 瘦，于是 A 在 Q_0 也瘦，因为 e 在 Q_0 是瘦的(由引理 1). 如果 Q_0 不是 $A\backslash e$ 的聚点，那么 $A\backslash e$ 在 Q_0 当然瘦，因此 A 在 Q_0 也瘦.

必要性 现在假定 A 在 Q_0 瘦. 如果 $Q_0\notin A'$，那么 Q_0 有一个邻域 D 使 $D\cap A$ 至多只包含 Q_0 一点. 这时候 $A\cap D$ 的外容量位势恒等于 0. 如果 $Q_0\in A'$，那么由推论 1，存在一个正测度 ν，使

$$\varliminf_{A\ni P\to Q_0} U^\nu(P)=\infty,\quad 0<U^\nu(Q_0)<\infty.$$

因此，Q_0 有一个邻域 D，使下式成立：

$$U^\nu(P)>U^\nu(Q_0)+1,\quad P\in A\cap D\backslash\{Q_0\}.\quad (4.4.8)$$

由于 $U^\nu(P)$ 下半连续，$A\cap D\backslash\{Q_0\}$ 必须有一个邻域 G 使不等式(4.4.8)对每一点 $P\in G$ 成立. 假定 γ 是 G 的一个紧致子集的外容量分布，那么(4.4.8)相对于 γ 几乎处处成立. 由此知道下式在 γ 下几乎处处成立：

$$(U^\nu(Q_0)+1)U^\gamma(P)<U^\nu(P).$$

因此，凌驾原理在 Q_0 必须也成立. 所以得到

$$U^\gamma(Q_0)<\frac{U^\nu(Q_0)}{1+U^\nu(Q_0)}<1.$$

再假定 $n=2$. γ 表示 $A\cap D\backslash\{Q_0\}$ 的 Wiener 外容量分布，那么，$U_2^{*\gamma}=U^\gamma_{K(Q_0,R)}+u$ 在 $K(Q_0,R)$ 里成立，这里 R 适当地选取，使调和函数 $u>0$，并且 $K(Q_0,R)\supseteq\overline{A\cap D}$. 于是由(4.4.8)得到在 γ 下 $(U^\nu(Q_0)+1)(U^\gamma_{K(Q_0,R)}(P)+u(P))<U^\nu(P)$ 几乎处处成立. 把凌驾原理用到 $U^\gamma_{K(Q_0,R)}$ 上去，同样得到 $U_2^{*\gamma}(Q_0)<1$. ▌

定理 4.4.7 E^n 的子集 A 瘦的点，除了不属于 A 的以外，构成一个零容集.

证明 E^n 中的有理细胞只有可列个. 如果 A 在一点 $Q_0\in A$ 瘦，那么 Q_0 有一个邻域 D 使 $A\cap D$ 的外容量位势在 Q_0 小于 1. D 至少包含一个有理细胞 $C_k\ni Q_0$，于是 $A\cap C_k$ 的外容量位势 U^{γ_k} 在 Q_0 小于 1. 这就是说，

$$Q_0\in\{Q\,|\,U^{\gamma_k}(Q)<1,\ Q\in A\cap C_k\}.$$

由此我们考虑点集

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\{Q\,|\,U^{\gamma_k}(Q)<1,\ Q\in A\cap C_k\}.$$

由于 U^{γ_k} 在 $A\cap C_k$ 里似乎处处等于 1，我们知道每个 $\{Q\,|\,U^{\gamma_k}(Q)<$

$1, Q \in A \cap C_k\}$ 是零容的. 因此，定理 4.4.7 所说的点集零容. ▌

由引理 1 和定理 4.4.7 得到

定理 4.4.8 E^n 的子集零容的充分而且必要的条件是处处都瘦.

定理 4.4.9 E^n 的子集 A 在一点 Q_0 瘦的充分而且必要的条件是随便取定一个实数 $d: 0<d<1$，点集 $A_m = \{P \mid d^{m+1} < r_{PQ_0} \leqslant d^m, P \in A\}(m=1,2,\cdots)$的外容量位势 U^{ν_m}(可以相对于 E^n 的任意一个固定的子开球，当 $n=2$ 时可以是 Wiener 外容量位势)满足

$$\sum_{m=1}^{\infty} U^{\nu_m}(Q_0) < \infty. \qquad (4.4.10)$$

证明 *充分性* 假定(4.4.10)成立，那么当正整数 N 充分大的时候，

$$\sum_{m=N}^{\infty} U^{\nu_m}(Q_0) < 1.$$

可是 $\sum\limits_{m=N}^{\infty} U^{\nu_m}(P)$ 在 $\bigcup\limits_{m=N}^{\infty} A_m$ 里至多除一个零容集外不比 1 小. 因此由定义，$\bigcup\limits_{m=N}^{\infty} A_m$ 在 Q_0 瘦. 因此 A 也在 Q_0 瘦.

必要性 假定 A 在 Q_0 瘦，要证明(4.4.10)成立，只用证明对某一个正整数 i，下列式子成立：

$$\sum_{k=1}^{\infty} U^{\nu_{ik}}(Q_0) < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} U^{\nu_{ik+1}}(Q_0) < \infty, \cdots,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} U^{\nu_{ik+i-1}}(Q_0) < \infty. \qquad (4.4.11)$$

现在证明(4.4.11)的第一式成立.

首先，存在一个正整数 N 使 $\bigcup\limits_{k=N}^{\infty} A_{ik} = A'$ 的外容量位势 $U^{\nu'}$ 在 Q_0 小于 1，也就是

$$U^{\nu'}(Q_0) = \sum_{k=N}^{\infty} U^{\nu' \mid A_{ik}}(Q_0) < 1. \qquad (4.4.12)$$

我们来比较(4.4.11)的第一式和(4.4.12)里的级数的对应项.当 E^n 的维数 $n>2$ 时,对任何一点 $P\in A_{ik}$,

$$
\begin{aligned}
U^{\nu'|A_{ik}}(P) &= U^{\nu'}(P) - \sum_{h\neq k}\int_{A_{ih}} r_{PQ}^{2-n}\mathrm{d}\nu'(e_Q) \\
&\geqslant U^{\nu'}(P) - \sum_{h\neq k}\int_{A_{ih}} (1-d^{i-1})^{2-n} r_{Q_0Q}^{2-n}\mathrm{d}\nu'(e_Q) \\
&= U^{\nu'}(P) - (1-d^{i-1})^{2-n}\{U^{\nu'}(Q_0) - U^{\nu'|A_{ik}}(Q_0)\}.
\end{aligned}
\tag{4.4.13}
$$

由于 $U^{\nu'}$ 在 A' 里似乎处处等于 1,我们得到在 A_{ik} 里似乎处处有

$$
U^{\nu'|A_{ik}}(P) \geqslant 1-(1-d^{i-1})^{2-n}\{U^{\nu'}(Q_0) - U^{\nu'|A_{ik}}(Q_0)\}.
$$

因为 $U^{\nu'}(Q_0)<1$,所以如果取 i 充分大,上面不等式右边大于一个正数 b.现在 $U^{\nu_{ik}}$ 在 A_{ik} 里似乎处处等于 1,因此得到在 A_{ik} 里似乎处处

$$
U^{\nu'|A_{ik}}(P) > bU^{\nu_{ik}}(P). \tag{4.4.14}
$$

由于 ν_{ik} 是 A_{ik} 的外容量分布,应用凌驾原理(见定理 4.4.6 的证明)得到

$$
U^{\nu'|A_{ik}}(Q_0) > bU^{\nu_{ik}}(Q_0). \tag{4.4.15}
$$

所以由(4.4.12)得到(4.4.11)的第一式.(4.4.11)的其余各不等式可以同样证明.

对 E^2,先把上面所说的位势理解为相对于一个圆盘 $K(P_0,R)$ 里的 Green 位势.这样一个圆盘的 Green 函数是

$$
G(P,Q) = \log_e r_{\bar{P}Q} - \log_e r_{PQ},
$$

这里 $\bar{P}$ 关于圆周 $S(P_0,R)$ 与 P 对称.因此对任何位势 $U^\mu(P)$,

$$
\begin{aligned}
U^\mu(P) &= \int G(P,Q)\mathrm{d}\mu(e_Q) \\
&= \int \log_e r_{\bar{P}Q}\mathrm{d}\mu(e_Q) + \int \log_e \frac{1}{r_{PQ}}\mathrm{d}\mu(e_Q).
\end{aligned}
$$

把等式最后两个位势分别记作 $W_1^\mu(P)$ 及 $W_2^\mu(P)$.跟前面一样,对于任何 $P\in A_{ik}$ 可以利用下列不等式:

$$r_{PQ} \geqslant (1-d^{i-1}) r_{Q_0 Q}$$

得到

$$-\log_e r_{PQ} \leqslant -\log_e(1-d^{i-1}) - \log_e r_{Q_0 Q}.$$

不妨假定 $d^{N_i} < \frac{1}{2}$，于是所考虑的距离函数 $r_{PQ} < 1$，而 $-\log_e r_{PQ} > 0$. 因此得到与(4.4.13)类似的不等式

$$\begin{aligned} W_2^{\nu'|A_{ik}}(P) \geqslant & W_2^{\nu'}(P) - \log_e(1-d^{i-1})(\nu'(A') - \nu'(A_{ik})) \\ & - (W_2^{\nu'}(Q_0) - W_2^{\nu'|A_{ik}}(Q_0)). \end{aligned}$$

两边都添加 $W_1^{\nu'|A_{ik}}(P)$，得到似乎处处有

$$\begin{aligned} U^{\nu'|A_{ik}}(P) \geqslant & W_2^{\nu'}(P) - W_2^{\nu'}(Q_0) - \log_e(1-d^{i-1})\nu'(A') \\ & + \log_e(1-d^{i-1})\nu'(A_{ik}) + W_1^{\nu'|A_{ik}}(P) \\ & + W_2^{\nu'|A_{ik}}(Q_0). \end{aligned} \tag{4.4.16}$$

对 $P \in A'$，似乎处处 $U^{\nu'}(P) = 1 > U^{\nu'}(Q_0)$，而 $W_1^{\nu'}$ 在 Q_0 是连续的，所以在现在 P 跟 Q_0 很接近的情况下，不妨假定 $W_2^{\nu'}(P) - W_2^{\nu'}(Q_0)$ 大于一个跟 P 无关的正常数. 这样就看到 (4.4.16)的右端大于一个跟 P 无关的正常数 b. 于是得到(4.4.14)和(4.4.15)，因此由(4.4.12)推出(4.4.11).

对 Wiener 外容量位势同样成立，因为 $\sum_{k=1}^{\infty} W_1^{\nu_{ik}}(Q_0)$ 总是收敛的. 由上面的证明得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} W_2^{\nu_{ik}}(Q_0) < \infty. \quad \blacksquare$$

特别，当 A 是闭集的时候，这里所讲的就是 de la Vallée Poussin 的判别法，它是从下面的 Wiener 的判别法来的. 我们注意：

$$d^{m(2-n)}\nu_m(A_m) \leqslant U^{\nu_m}(Q_0) \leqslant d^{(m+1)(2-n)}\nu_m(A_m), \qquad n>2,$$

$$-m\log_e d \cdot \nu_m(A_m) \leqslant U^{\nu_m}(Q_0) \leqslant -(m+1)\log_e d \cdot \nu_m(A_m), \quad n=2.$$

那么由定理 4.4.9 就得到 Wiener 判别法的下面形式的推广.

推论 2 用定理 4.4.9 里的记号，E^n 的子集在一点 Q_0 瘦的充分而且必要的条件是

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cap}_e(A_m)\Big/d^{m(n-2)} < \infty, & n > 2, \\ \sum_{m=1}^{\infty} m\,\mathrm{Cap}_e(A_m) < \infty, & n = 2. \end{cases} \tag{4.4.17}$$

对 E^2，(4.4.17)里的 $\mathrm{Cap}_e(A_m)$指的是相对于一个开圆盘的 Green 外容量，或者 Wiener 容量.

例 2 E^2 里的任何一个不止包含一点的直线段 L 除了外点处处不瘦(点集 A 的外点即 $C(A)$的内点).

事实上，由 §4.1 习题 4 知道，不止一点的一个直线段不零容，因此它一定在某一点 $P\in L$ 不瘦. 假定 P 是 L 的端点，那么由定理 4.4.5，L 既然在它的一个端点不瘦，任何一个不止一点的直线段也这样. 所以 L 的任何一个不止一点的子线段在自己的端点不瘦. L 上所有的点都是一个不止一点的子线段的端点，所以 L 在 L 上所有的点不瘦. 同样，假定 P 是 L 的相对内点，那么 L 被 P 分成两个以 P 为公共端点的子线段. 由定理 4.4.1，至少一个子线段在 P 不瘦. 这样又得到一个在端点不瘦的直线段，因此又跟上面一样推出：一个不止一点的直线段在它的每一点都不瘦.

定理 4.4.10 E^2 的子集 A 如果在一点 P 瘦，那么一定存在一列收敛于 0 的正数$\{r_m\}$，使每个圆周 $S(P,r_m)$与 A 不相交.

证明 假如不然，一定存在一个正数 a 使所有的圆周 $S(P,r)$ $(0\leqslant r\leqslant a)$都与 A 相交. 从 P 作 $S(P,a)$的一条半径$\overline{PQ}$. 作一个映射把 $S(P,r)$里的所有的点都映到 $S(P,r)$跟$\overline{PQ}$的交点. 这是一个连续映射满足定理 4.4.5 的关于映射 f 的假设. 在这个映射下，$(A\cap K(P,a))\cup\{P\}$的像就是$\overline{PQ}$. A 在 P 瘦，那必定$\overline{PQ}$在 P 也瘦，而这是不可能的. ▌

特别，由这事实得到下列结论：

(1) E^2 的子集 A 如果在一点 $P\in A$ 瘦,那么 A 的包含 P 的成分(最大的连通子集)只能是$\{P\}$.

(2) E^2 的零容子集一定全不连通.

注意:(1),(2)的逆一般不成立.比方著名的 Cantor 三分点集是全不连通的闭集,它非但不零容而且除了外点它到处不瘦.关于这一点我们下面就来说明.

例 3 在 E^1 里,我们令 $S_0=[0,1]$,$S_1=S_0\setminus(1/3,2/3)$,$S_2=S_1\setminus(1/3^2,2/3^2)\setminus(7/3^2,8/3^2)$,….一般 S_m 是从 S_{m-1}的每个成分闭区间去掉正中三分之一长度的区间后所剩的部分,那么 $S=S_1\cap S_2\cap\cdots$,叫做 **Cantor 三分集**.事实上,

$$S=\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{3^m}\middle|a_m=0\text{ 或者 }2\right\}.$$

S 在 E^1 的 Lebesgue 测度下是零集,但是我们可以证明:作为 E^2 的子集,S 不零容.

作正测度 μ_m,总质量等于 1,支柱包含在 S_m 里,并且相对于 E^1 的 Lebesgue 测度在 S_m 上的限制,它的密度是常数.当 $m\to\infty$ 时,μ_m 浑收敛于一个测度 μ.

把包含 S 的这个 E^1 取作 E^2 的坐标轴,这个 E^1 的原点就作为 E^2 的原点 O.把 S_1 的最后一个成分闭区间记作 I_1,把 $S_2\setminus I_1$ 的最后一个成分闭区间记作 I_2.一般,I_m 表示 $S_m\setminus I_1\setminus\cdots\setminus I_{m-1}$的最后一个成分闭区间.那么 $S\setminus\{O\}\subseteq I_1\cup I_2\cup\cdots$,$\mu(I_m)=1/2^m$,并且 I_m 到原点 O 的距离是 $d_m=2/3^m$.因此

$$\begin{aligned}U_2^{\mu}(O)&=\sum_m\int_{I_m}\log_e\frac{1}{r_{OP}}\mathrm{d}\mu(e_P)<\sum_m\log_e\frac{1}{d_m}\mu(I_m)\\&=\sum_m\frac{1}{2^m}\log_e\frac{3^m}{2}<\sum_m\frac{1}{2^m}\log_e 3^m\\&=2\log_e 3.\end{aligned}$$

现在利用这事实来估计 U_2^{μ} 在 S 里的数值.把 S 关于 O 的对称像记作 $\widetilde{S}$,μ 的对称像记作 $\widetilde{\mu}$,那么 $U_2^{\mu+\widetilde{\mu}}$ 显然在 O 取极大值.所以

$$U_2^{\mu+\tilde{\mu}}(P) \leqslant U_2^{\mu}(O) + U_2^{\tilde{\mu}}(O) < 4\log_e 3.$$

$\mu+\tilde{\mu}$ 的总质量是 2，所以 $S\cup\tilde{S}$ 的对数导体位势在 $S\cup\tilde{S}$ 里小于 $2\log_e 3$. 因此 $S\cup\tilde{S}$ 的对数容量大于

$$e^{-2\log_e 3} = \frac{1}{9} > 0.$$

因此，S 和 $\tilde{S}$ 至少有一个不零容. 但是 S 和 $\tilde{S}$ 的对数容量相等，所以 S 不零容.

因此，S 一定在某一点 $P\in S$ 不瘦. 同例 2 一样，利用放大及对称移动等等变换知道 S 在每一点 $P'\in S$ 都不瘦.

上面说明了瘦及外容量的概念的关系. 对内容量也可以建立类似的理论.

定义 2 假定 $A\subseteq \boldsymbol{E}^n$，$Q\in \boldsymbol{E}^n$，$A\cup\{Q\}$ 的任何一个紧致子集都在 Q 瘦，那么说 A 在 Q 是**内瘦的**，而 $C(A)$ 在 Q 是**外肥的**.

把定理 4.4.2 同这里的定义 2 对照一下，我们可以把定义 1 中的肥和瘦分别叫做内肥和外瘦. 外瘦比内瘦强，内肥比外肥强.

内瘦跟内容量位势有像定理 4.4.6 那样的关系.

定理 4.4.11 $A\subseteq \boldsymbol{E}^n$ 在一点 $Q\in \boldsymbol{E}^n$ 内瘦的充分而且必要的条件是 Q 有邻域 D 使 $A\cap D$ 的内容量位势在 Q 小于 1.

证明 充分性 假定条件成立，那么 $A\cup\{Q\}$ 的任何一个紧致子集与 D 的交集的容量位势在 Q 小于 1，因此在 Q 瘦. 因此，A 在 Q 内瘦.

必要性 假定条件不成立，那么跟推论 2 一样得到

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cap}_i(A_m)\Big/ d^{m(n-2)} = \infty, & n > 2, \\ \sum_{m=1}^{\infty} m\,\mathrm{Cap}_i(A_m) = \infty, & n = 2, \end{cases} \tag{4.4.18}$$

这里 Cap_i 表示内容量. 取 A_m 的紧致子集 B_m，使 $\mathrm{Cap}(B_m) \geqslant \frac{1}{2}\mathrm{Cap}_i(A_m)$，那么 $K = \{Q\}\cup\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$ 是 $A\cup\{Q\}$ 的紧致子集，而且

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cap}(B_m)\Big/d^{m(n-2)} = \infty, & n > 2, \\ \sum_{m=1}^{\infty} m\,\mathrm{Cap}(B_m) = \infty, & n = 2. \end{cases}$$

由推论 2 得到 K 在 Q 不瘦. 因此, A 在 Q 不内瘦. ▌

此外还可以证明跟定理 4.4.1 类似的事实.

定理 4.4.12 如果 $A \subseteq E^n$ 在一点 $Q \in E^n$ 内瘦, 那么 A 的任何一个子集在 Q 都内瘦. 如果 E^n 的有限个子集 $B_1, \cdots, B_k$ 都在同一点 $Q \in E^n$ 内瘦, 那么 $A = B_1 \cup \cdots \cup B_k$ 在 Q 也内瘦.

证明 定理前半部分很明显, 只用证明后半部分. 假定 A 在 Q 不内瘦, 那么(4.4.18)成立. 可是

$$\mathrm{Cap}_i(A_m) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Cap}_i(A_m \cap B_j),$$

所以

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cap}_i(A_m \cap B_j)\Big/d^{m(n-2)} = \infty, & n > 2, \\ \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{\infty} m\,\mathrm{Cap}_i(A_m \cap B_j) = \infty, & n = 2. \end{cases}$$

因此, 至少存在一个 j, 使

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Cap}_i(A_m \cap B_j)\Big/d^{m(n-2)} = \infty, & n > 2, \\ \sum_{m=1}^{\infty} m\,\mathrm{Cap}_i(A_m \cap B_j) = \infty, & n = 2. \end{cases}$$

因此 B_j 在 Q 不内瘦. 这跟假设是矛盾的. ▌

习　题

1. 模仿定理 4.4.3, 建立点集在一点肥的一个必要条件. 由此说明: 如果一个点集在某一点瘦的话, 一定不肥; 肥的话, 一定不

瘦；但是既不瘦又不肥的情形是存在的.

2. 证明 $\boldsymbol{E}^3$ 中的一个平面闭三角形或者闭圆盘 A 在每一点 $P\in A$ 不瘦.

3. 对内瘦建立类似于定理 4.4.5,4.4.7,4.4.8,4.4.9 的定理.

4. 假定 $A\subseteq\boldsymbol{E}^n$，$Q\in\boldsymbol{E}^n$，$Q$ 有邻域 D 使 $A\cap D$ 可定容，那么 A 在 Q 内瘦跟 A 在 Q 瘦等价.

5. 假定 A 是 $\boldsymbol{E}^n$ 的一个闭子集，那么在一点 $Q\in B(A)$，$B(A)$ 在 Q 瘦与 $C(A)$ 在 Q 瘦等价.

§4.5 细(肥)拓扑

假定 $A\subseteq\boldsymbol{E}^n$，$C(A)$ 在每一点 $Q\in A$ 都瘦，那么说 A 是一个**细开集**(或者**肥集**).

由 §4.4 的理论知道开集一定是细开集. 因此，$\boldsymbol{E}^n$ 和空集都是细开集. 此外，由定理 4.4.1 还知道有限个或者无限个细开集的和集是细开集，有限个细开集的交集是细开集. 因此细开集全体组成 $\boldsymbol{E}^n$ 上的一个拓扑，叫做 $\boldsymbol{E}^n$ 上的**细拓扑**(或者**肥拓扑**)①. 这个拓扑显然比通常拓扑细.

在这个细拓扑下，极限、连续等等名称有时另外添上一个细(肥)字，说成细极限、细连续等等，以免与通常的意义混淆.

大家知道，上下调和函数或者位势在通常拓扑下都不一定连续，但是我们可以证明

定理 4.5.1(**H. Cartan**) $\boldsymbol{E}^n$ 上的细拓扑是使所有的上调和函数都处处连续的最粗的拓扑.

证明 先证明细拓扑使任何一个上调和函数 v 处处连续. 为

---

① H. Cartan 首创了这个概念，并且取了细拓扑这个名字. 不过近来拓扑粗细的说法意义非常广泛，把这里这个特殊的拓扑另叫"肥拓扑"更恰当一些.

了这个目的，只要证明对任何实数 a 及 b，$a<b$，下列点集都是细开集：

$$A_1=\{P\mid a<v(P)<b\},$$
$$A_2=\{P\mid a<v(P)\leqslant+\infty\},$$
$$A_3=\{P\mid-\infty\leqslant v(P)<b\}.$$

因为 v 下半连续，所以 A_2 是通常开集，所以 A_2 是细开集.

再证明 A_3 是细开集. 我们只要证明 $C(A_3)$ 在每一点 $P\in A_3$ 瘦好了. 如果 P 不是 $C(A_3)$ 的通常聚点，那么 $C(A_3)$ 当然在 P 瘦；如果 P 是 $C(A_3)$ 的通常聚点，那么由于 $v\geqslant b$ 在 $C(A_3)$ 里成立，我们得到

$$\varliminf_{C(A_3)\ni Q\to P} v(Q)\geqslant\varliminf_{C(A_3)\ni Q\to P} b>v(P).$$

因此，$C(A_3)$ 在 P 瘦.

由于 $A_1=A_2\cap A_3$，因此 A_1 也是细开集.

再证明细拓扑是使所有的上调和函数都连续的最粗的拓扑. 假定 T 也是一个拓扑，使所有的上调和函数都连续. 属于 T 的点集称为 T 开集. 那么要证明的就是：细开集一定是 T 开集.

首先，任何一个开球 $K(Q_0,r)$ 一定是 T 开集，因为

$$K(Q_0,r)=\left\{P\,\middle|\,U_n^{\varepsilon_{Q_0}}(P)>\begin{cases}r^{2-n}, & n>2\\ -\log_e r, & n=2\end{cases}\right\}.$$

其次，假定 A 是一个细开集，那么可以把 A 里的点分成两类：第一类不是 $C(A)$ 的聚点以及第二类是 $C(A)$ 的聚点但也是 $C(A)$ 瘦的地方. 第一类点是 A 的通常的内点，因此有一个通常的邻域包含在 A 里. 对每个第二类点 Q_0，存在一个正测度 μ，使

$$\varliminf_{C(A)\ni P\to Q_0} U^{\mu}(P)>U^{\mu}(Q_0).$$

因此有一个开球 $K(Q_0,r)$，使

$$U^{\mu}(P)>U^{\mu}(Q_0)+\varepsilon,\quad P\in K(Q_0,r)\cap C(A).$$

所以点集

$$D = \{P \mid -\infty < U^{\mu}(P) < U^{\mu}(Q_0) + \varepsilon\} \cap K(Q_0, r) \subseteq A.$$

已经说过，开球 $K(Q_0,r)$ 是 T 开集. 同时，由于 U^{μ} 在 T 下处处连续，所以 $\{P \mid -\infty < U^{\mu}(P) < U^{\mu}(Q_0)+\varepsilon\}$ 也是 T 开集. 因此，D 也必须是 T 开集. 这说明每个第二类点也一定有一个 T 邻域包含在 A 里.

通常的邻域当然是 T 邻域，因此无论是 A 里第一或第二类点都是 A 的 T 内点，因此 A 是 T 开集. ▌

从定理的证明还得到

推论 1 E^n 上的细拓扑是具有下列性质的最粗的拓扑：使在 E^n 的有界子区域(通常的)里定义的有限正上调和函数在它的定义域里处处连续.

证明 细拓扑当然使所有这种上调和函数处处连续. 要证明它是最粗的，只要注意在定理 4.5.1 的情况下，证明细拓扑最粗时，只用到在一点的通常邻域中的一个正上调和函数，并且所提到的 $U^{\varepsilon_Q}(P)$ 可以用有限的 $U^{\varepsilon_{Q,R}}(P)$ 代替. ▌

定理 4.5.2 E^n 的子集 A 在一点 Q_0 瘦的充分而且必要的条件是 Q_0 是 A 的细孤立点或者细外点.

证明 假定 A 在 Q_0 瘦. 如果 $Q_0 \in A$，那么 $K(Q_0,r) \setminus (A \cap K(Q_0,r)) \cup \{Q_0\}$ 或 $K(Q_0,r) \setminus A \cup \{Q_0\}$ 是 Q_0 的一个细邻域. 可是它跟 A 的交集是 $\{Q_0\}$，所以 Q_0 是 A 的细孤立点. 如果 $Q_0 \notin A$，那么所说的这邻域跟 A 不相交，因此 Q_0 是 A 的细外点.

反过来，假定 Q_0 是 A 的细孤立点或者细外点，那么当然 A 在 Q_0 瘦. ▌

由定理 4.5.2 可以看到 Lebesgue 刺去掉顶尖那一点以后剩下的部分仍旧是细闭集，Lebesgue 刺的余集再添上顶尖那一点后仍旧是细开集. 一般，一个开集添上它的一个不正则边界点以后仍旧是细开集. 关于不正则边界点参考 §5.1. 还有，一个点集零容的充分而且必要的条件是它是细孤立点集. 所以假定 $\{P_m\}$ 是一个点列收敛于一点 Q_0，那么因为 $\{P_m \mid m=1,2,\cdots\} \cup \{Q_0\}$ 是零容的，Q_0

也是$\{P_m|m=1,2,\cdots\}\cup\{Q_0\}$的细孤立点，尽管它是$\{P_m|m=1,2,\cdots\}\cup\{Q_0\}$的通常的聚点. 因此，在细拓扑下是没有收敛点列的.

我们要特别谈一谈一个函数的细极限与通常极限的关系. 假定Q_0是$A\subseteq E^n$的一个细聚点(就是假定A在Q_0不瘦)，f是定义在A里的实函数. 那么由本节开头的一般定义知道，f在Q_0的**细极限**等于a(可能是$+\infty$)的意思是随便指定a的一个邻域D，Q_0总有一个细邻域V使

$$f(V\cap A\setminus\{Q_0\})\subseteq D.$$

把f在Q_0的细极限记作$\varphi\text{-}\lim\limits_{A\ni P\to Q_0} f$，不注明$\varphi$表示通常的极限.

定理 4.5.3 假定Q_0是$A\subseteq E^n$的一个细聚点，f是在A里定义的一个实函数，又假定

$$\varphi\text{-}\lim_{A\ni P\to Q_0} f(P)=a,$$

那么Q_0有一个细邻域V使

$$\lim_{A\cap V\ni P\to Q_0} f(P)=a.$$

证明 取a在$\hat{R}^1$中的一列单调减小的邻域$\{D_m\}$，使$\bigcap\limits_m D_m=\{a\}$，那么由假设，$Q_0$有一列单调减小的细邻域$\{V_m\}$，使

$$f(V_m\cap A\setminus\{Q_0\})\subseteq D_m.$$

由于每个V_m是Q_0的一个细邻域，$C(V_m)$在Q_0瘦. 如果每个$C(V_m)$都不以Q_0为聚点，那么V_m是通常的邻域，于是f就在通常的意义下在Q_0以a为极限值，定理 4.5.3 的结论成立. 如果有一个$C(V_m)$以Q_0为聚点，于是$C(V_{m+1}),C(V_{m+2}),\cdots$都以$Q_0$为聚点，因为$C(V_m)$是单调增加的. 因此不妨假定所有的$C(V_m)$都以$Q_0$为聚点，于是对每个$m$，存在一个正测度的位势$U^{(m)}$满足

$$\lim_{C(V_m)\ni P\to Q_0} U^{(m)}(P)=\infty,\quad 0<U^{(m)}(Q_0)<\infty. \tag{4.5.1}$$

取充分小的正数a_m，使

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m U^{(m)}(Q_0) < \infty,$$

那么$U = \sum_{m=1}^{\infty} a_m U^{(m)}$是一个不恒等于∞的正测度位势. 现在令

$$F = \bigcup_{m=1}^{\infty}(\{P \mid a_m U^{(m)}(P) > m\} \cap C(V_m)).$$

由于(4.5.1)成立，对每个m存在一个$K(Q_0, r_m)$使

$$K(Q_0, r_m) \cap C(V_m) \subseteq \{P \mid a_m U^{(m)}(P) > m\} \cap C(V_m). \tag{4.5.2}$$

由此，由$Q_0 \in (K(Q_0, r_m) \cap C(V_m))'$知道$Q_0 \in (\{P \mid a_m U^{(m)}(P) > m\} \cap C(V_m))'$. 因此$Q_0 \in F'$. 但因为$Q_0 \notin C(V_m)$，所以$Q_0 \notin F$.

我们要证明

$$\lim_{F \ni P \to Q_0} U(P) = +\infty. \tag{4.5.3}$$

事实上，随便取好一个正数b，取正整数N使$N \leqslant b < N+1$. 然后把F写成

$$F = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_N \cup F_{N+1},$$

其中

$$F_m = \{P \mid a_m U^{(m)}(P) > m\} \cap C(V_m), \quad m \leqslant N,$$

$$F_{N+1} = \bigcup_{m>N}(\{P \mid a_m U^{(m)}(P) > m\} \cap C(V_m)).$$

那么当$m \leqslant N$时，$F_m \subseteq C(V_m)$. 所以由(4.5.1)知道对每个$m \leqslant N$，Q_0有一个邻域W_m，使

$$U(P) \geqslant a_m U^{(m)}(P) > b, \quad P \in W_m \cap F_m \backslash \{Q_0\}.$$

令$W = \bigcap_{m=1}^{N} W_m$，那么

$$U(P) > b, \quad P \in W \cap \left(\bigcup_{m=1}^{N} F_m\right) \Big\backslash \{Q_0\}.$$

此外，如果$P \in F_{N+1}$，那么一定存在一个$m > N$，使

$$U(P) \geqslant a_m U^{(m)}(P) > m \geqslant N+1 > b.$$

由于 $W\cap F\setminus\{Q_0\}\subseteq\left(W\cap\left(\bigcup_{m=1}^{N}F_m\right)\right)\cup F_{N+1}\setminus\{Q_0\}$，所以得到

$$U(P)>b,\quad P\in W\cap F\setminus\{Q_0\}.$$

因此，(4.5.3)成立.

由于(4.5.3)成立，F 在 Q_0 是瘦的，因此 $C(F)=V$ 是 Q_0 的一个细邻域. 现在证明这个 V 满足定理 4.5.3 的要求.

事实上由(4.5.2)知道

$$\begin{aligned}V=C(F)&=C\left(\bigcup_m(\{P\mid a_mU^{(m)}(P)>m\}\cap C(V_m))\right)\\&=\bigcap_m C(\{P\mid a_mU^{(m)}(P)>m\}\cap C(V_m))\\&\subseteq\bigcap_m C(K(Q_0,r_m)\cap C(V_m))\\&=\bigcap_m(C(K(Q_0,r_m))\cup V_m).\end{aligned}$$

因此，对任何一个 m，Q_0 有邻域 $K(Q_0,r_m)$，使

$$\begin{aligned}&f(K(Q_0,r_m)\cap V\cap A\setminus\{Q_0\})\\&\quad\subseteq f(K(Q_0,r_m)\cap\bigcap_j(C(K(Q_0,r_j))\cup V_j)\cap A\setminus\{Q_0\})\\&\quad\subseteq f(K(Q_0,r_m)\cap(C(K(Q_0,r_m))\cup V_m)\cap A\setminus\{Q_0\})\\&\quad=f(K(Q_0,r_m)\cap V_m\cap A\setminus\{Q_0\})\subseteq D_m.\qquad\blacksquare\end{aligned}$$

细拓扑的概念是 H. Cartan 首创的，他把细拓扑当作使所有上调和函数处处连续的最粗的拓扑来定义. 关于细极限的定理 4.5.3 也是他发现的. Doob(1960)把这定理的结果推广到上下极限.

从外肥的概念也可以类似地得到一个拓扑，可以称为外肥拓扑. 对外肥和外肥拓扑将另文详细论述，这里不多谈.

第五章　Dirichlet 问题、扫除法的推广

§ 5.1　Dirichlet 问题及正则边界点

我们要证明下面的定理：

定理 5.1.1（Wiener-de la Vallée Poussin）　假定 Ω 是 E^n 的一个有界开子集，f 是一个定义在 $B(\Omega)$上的连续函数，那么存在一个唯一的在 Ω 里有界并且调和的函数 u，似乎处处以 f 为边界值. 此外，

$$u(P) = \int_{B(\Omega)} f \mathrm{d}\eta_P, \quad P \in \Omega, \tag{5.1.1}$$

η_P 表示分布在 $B(\Omega)$上以 P 为极的 Ω 的调和测度.

证明　首先，由 § 4.3 极大值原理知道，如果所说的这种函数 u 存在，那么显然是唯一的. 因此只要证明(5.1.1)式右端的积分具有所说的性质.

用$\{v_m\}$表示一列能量有限的位势在 $B(\Omega)$上一致收敛于 f(由于 f 可以延拓为一个支柱紧致的全空间的连续函数)，那么由 § 3.4，下列函数在 Ω 里有界调和并且似乎处处以 v_m 为边界值：

$$u_m(P) = \int v_m \mathrm{d}\eta_P.$$

因为 v_m 一致收敛，所以由 § 4.3 知道，u_m 在 Ω 一致收敛于一个有界调和函数 u. 由 u_m 的定义知道

$$u(P) = \lim_{m\to\infty} u_m(P) = \lim_{m\to\infty} \int v_m \mathrm{d}\eta_P = \int f \mathrm{d}\eta_P.$$

再来证明 u 似乎处处以 f 为边界值. 因为每个 u_m 似乎处处以 v_m 为边界值，又因为可列个零容集的和集零容，所以对每一点 Q

$\in B(\Omega)\backslash e$,这里 e 是一个零容集,下式成立:

$$\lim_{\Omega \ni P \to Q} u_m(P) = v_m(Q), \quad m = 1,2,\cdots.$$

现在任意取定一点 $Q \in B(\Omega)\backslash e$,任意取一个正数 ϵ,可以取到一个充分大的正整数 N,使

$$|v_N(Q) - f(Q)| < \epsilon/3,$$
$$|u_N(P) - u(P)| < \epsilon/3, \quad P \in \Omega.$$

对这个 N,又可以取到一个正数 δ,使对任何一个到 Q 的距离小于 δ 的点 $P \in \Omega$,有 $|u_N(P) - v_N(Q)| < \varepsilon/3$. 因此,

$$|u(P) - f(Q)| < \epsilon, \quad r_{PQ} < \delta, P \in \Omega. \quad \blacksquare$$

注意 在定理 5.1.1 中,一个零容集除外是不可避免的限制. 比方取 Ω 为 E^2 的子区域 $0 < |\zeta| < 1$,那么 $B(\Omega)$ 是单位圆周 $|\zeta| = 1$ 及 $\{0\}$ 的和集. 定义

$$f(\zeta) = \begin{cases} 0, & \text{当 } |\zeta| = 1, \\ 1, & \text{当 } \zeta = 0, \end{cases}$$

那么 $f(\zeta)$ 在 $B(\Omega)$ 上连续,可是不存在函数 u 在 Ω 里有界调和并且处处以 $f(\zeta)$ 为边界值. 事实上,假如 u 在 Ω 里有界调和,并且在单位圆周上以 0 为边界值,那么由极大值原理,u 必须处处不大于 0,$-u$ 也必须处处不大于 0,因此只能是 $u \equiv 0$,因此在原点就不能以 1 为边界值了.

正则边界点 假定一点 $Q \in B(\Omega)$,对 $B(\Omega)$ 上所有的连续函数 f,

$$\lim_{\Omega \ni P \to Q} \int f \mathrm{d}\eta_P = f(Q), \tag{5.1.2}$$

就说 Q 是 Ω 的一个正则边界点.

由于任何一个在 $B(\Omega)$ 上连续的函数可以延拓为一个在全空间连续并且支柱紧致的函数,而且任何一个支柱紧致的连续函数在 $B(\Omega)$ 上的限制在 $B(\Omega)$ 上连续,(5.1.2)的意义就是对任何 $f \in \mathscr{K}_0$,

$$\lim_{\Omega \ni P \to Q} \int f \mathrm{d}\eta_P = \int f \mathrm{d}\varepsilon_Q.$$

所以得到

定理 5.1.2 E^n 的有界开子集 Ω 的一个边界点 Q 正则的充分而且必要的条件是当 $\Omega \ni P \to Q$ 的时候，η_P 浑收敛于 ε_Q.

不正则性事实上可以用肥瘦的概念来说明.

定理 5.1.3 E^n 的有界开子集 Ω 的一个边界点 Q_0 不正则的充分而且必要的条件是 $C(\Omega)$ 在 Q_0 瘦.

证明 充分性 假定 $C(\Omega)$ 在 Q_0 瘦，那么 Q_0 有一个邻域 D 使 $D\backslash\Omega$ 的容量位势 U^ν 在 Q_0 小于 1，可是 U^ν 在 $D\backslash\Omega$ 里似乎处处等于 1. 所以当 r 充分小的时候

$$\begin{aligned}1 > U^\nu(Q_0) &\geqslant \int U^\nu \mathrm{d}\varepsilon_{Q_0,r} \\ &= \int_\Omega U^\nu \mathrm{d}\varepsilon_{Q_0,r} + \int_{C(\Omega)} U^\nu \mathrm{d}\varepsilon_{Q_0,r} \\ &= \int_\Omega U^\nu \mathrm{d}\varepsilon_{Q_0,r} + \varepsilon_{Q_0,r}(C(\Omega)).\end{aligned}$$

因此，至少有一点 $P \in S(Q_0, r) \cap \Omega$，使 $U^\nu(P) \leqslant U^\nu(Q_0)$ 成立. 因此，

$$\begin{aligned}U^\nu(Q_0) \geqslant U^\nu(P) &= \int U^{\varepsilon_P} \mathrm{d}\nu = \int U^{\eta_P} \mathrm{d}\nu \\ &= \int U^\nu \mathrm{d}\eta_P = \int_{D \cap B(\Omega)} 1 \mathrm{d}\eta_P + \int_{B(\Omega)\backslash D} U^\nu \mathrm{d}\eta_P \\ &\geqslant \eta_P(D \cap B(\Omega)).\end{aligned}$$

所以

$$\underline{\lim}_{\Omega \ni P \to Q_0} \eta_P(D \cap B(\Omega)) \leqslant U^\nu(Q_0) < 1.$$

可是 $\varepsilon_{Q_0}(D \cap B(\Omega)) = 1$，所以当 $\Omega \ni P \to Q_0$ 的时候，η_P 不浑收敛于 ε_{Q_0}.

必要性 如果 Q_0 不正则，那么当 $\Omega \ni P \to Q_0$ 时，η_P 不浑收敛于 ε_{Q_0}. 因此 Q_0 有一个邻域 D，使

$$\overline{\lim_{\Omega \ni P \to Q_0}} \eta_P(D\backslash\Omega) < \varepsilon_{Q_0}(D\backslash\Omega) = 1. \qquad (5.1.3)$$

因此，$D\backslash\Omega$ 的容量位势 U^ν 满足下面的不等式：

$$\begin{aligned} U^\nu(Q_0) &\leqslant \underline{\lim_{P\to Q_0}} U^\nu(P) \leqslant \underline{\lim_{\Omega \ni P\to Q_0}} U^\nu(P) \\ &= \underline{\lim_{\Omega \ni P\to Q_0}} \int U^{\varepsilon_P} \mathrm{d}\nu = \underline{\lim_{\Omega \ni P\to Q_0}} \int U^{\eta_P} \mathrm{d}\nu \\ &= \underline{\lim_{\Omega \ni P\to Q_0}} \int U^\nu \mathrm{d}\eta_P = \underline{\lim_{\Omega \ni P\to Q_0}} \left[\eta_P(D\backslash\Omega) + \int_{B(\Omega)\backslash D} U^\nu \mathrm{d}\eta_P \right]. \end{aligned}$$

由于(5.1.3)，$\eta_P(B(\Omega)\backslash D)$ 当 $\Omega \ni P \to Q_0$ 时上极限不等于 0，而 U^ν 在 $B(\Omega)\backslash D$ 上小于 1，所以上面不等式中最后的项小于 1，因此，$C(\Omega)$在 Q_0 瘦. ▌

由定理 5.1.3 得到

推论 1 有界开子集的边界点正则与否是由边界的局部性质决定的.

推论 2 假定 K 是 $\boldsymbol{E}^n$ 的闭子集，那么 $C(K)$的成分中以 Q 为不正则边界点的至多只有一个.

证明 假定有两个成分 Ω_1 和 Ω_2 都以 Q 为不正则边界点，那么 $C(\Omega_1)$和 $C(\Omega_2)$在 Q 都瘦. 因此，$C(\Omega_1)\cup C(\Omega_2)$在 Q 也瘦. 可是 $C(\Omega_1)\supseteq\Omega_2$，所以 $\Omega_2\cup C(\Omega_2)=\boldsymbol{E}^n$ 在 Q 瘦，这是不可能的. ▌

由正则边界点的定义知道，Green 函数在正则边界点必须等于 0，我们现在证明倒过来也对.

定理 5.1.4 $\boldsymbol{E}^n$ 的有界开子集 Ω 的一个边界点 Q_0 正则的充分而且必要的条件是以每一点 $P_0 \in \Omega$ 为极的 Green 函数 $g(P, P_0) \to 0$(当 $\Omega \ni P \to Q_0$ 时).

证明 条件的必要性是显然的. 要证明充分性，只要证明在条件成立的情况下，调和测度 η_P 当 $\Omega \ni P \to Q_0$ 的时候浑收敛于 ε_{Q_0}. 因此只要证明对任何的 $P_1 \in \boldsymbol{E}^n$ 和 $r>0$，

$$\lim_{\Omega \ni P \to Q_0} \int U^{\eta_P}(P_0) \mathrm{d}\varepsilon_{P_1,r}(e_{P_0}) = \int U^{\varepsilon_{Q_0}}(P_0) \mathrm{d}\varepsilon_{P_1,r}(e_{P_0})$$

$$= U^{\varepsilon_{P_1,r}}(Q_0) \tag{5.1.4}$$

成立就行了.

我们提起注意,如果 $n=2$,我们可以作 $K(O,R)\supset\Omega$,然后把记号 U^{μ} 理解为相对于 $K(O,R)$ 的 Green 位势,这样下面可以不必分别对 $n>2$ 和 $n=2$ 两种不同情况来叙述.

为了证明(5.1.4),首先注意

$$\int U^{\eta_P} d\varepsilon_{P_1,r} = \int U^{\varepsilon_{P_1,r}} d\eta_P,$$

等号右边的项表示 $\varepsilon_{P_1,r}$ 扫到 $C(\Omega)$ 上去以后得到的位势在 P 的数值,因此它小于等于 $U^{\varepsilon_{P_1,r}}(P)$. 从而有

$$\varlimsup_{\Omega\ni P\to Q_0} \int U^{\eta_P} d\varepsilon_{P_1,r} \leqslant \varlimsup_{\Omega\ni P\to Q_0} U^{\varepsilon_{P_1,r}}(P) = U^{\varepsilon_{P_1,r}}(Q_0). \tag{5.1.5}$$

现在由于 $\lim\limits_{\Omega\ni P\to Q_0} g(P,P_0) = 0$,我们得到 $U^{\eta_P}(P_0)\to U^{\varepsilon_{Q_0}}(P_0)$. 所以由 Fatou 引理(定理 1.2.10),

$$\varliminf_{\Omega\ni P\to Q_0} \int U^{\eta_P} d\varepsilon_{P_1,r} \geqslant \int U^{\varepsilon_{Q_0}} d\varepsilon_{P_1,r} = U^{\varepsilon_{P_1,r}}(Q_0). \tag{5.1.6}$$

由(5.1.6),(5.1.5)得到(5.1.4). ▌

定理 5.1.4 中的充分条件还可以减弱. 事实上,假定存在一点 $P_1\in\Omega$,使当 $\Omega\ni P\to Q_0\in B(\Omega)$ 时,$g(P,P_1)\to 0$,那么对任何 $P_2\in\Omega$,当 $\Omega\ni P\to Q_0$ 时 $g(P,P_2)\to 0$. 这可以这样证明:取正数 δ 充分小,使 $\overline{K(P_2,\delta)}\subset\Omega$. 令

$$a = \max_{P\in S(P_2,\delta)} g(P,P_2),\quad b = \min_{P\in S(P_2,\delta)} g(P,P_1).$$

那么 $b>0$. 然后考虑 $\frac{a}{b}g(P,P_1)$ 和 $g(P,P_2)$. 这两个函数在 $\Omega\setminus\overline{K(P_2,\delta)}$ 里一个上调和,一个调和,而在 $\Omega\setminus\overline{K(P_2,\delta)}$ 的边界上,前者似乎处处大于或者等于后者. 因此由极大值原理,

$$\frac{a}{b}g(P,P_1) \geqslant g(P,P_2),\quad P\in\Omega\setminus\overline{K(P_2,\delta)}.$$

因此

$$0\leqslant \varliminf_{\Omega\ni P\to Q_0} g(P,P_2)\leqslant \varlimsup_{\Omega\ni P\to Q_0} g(P,P_2)\leqslant \frac{a}{b}\varlimsup_{\Omega\ni P\to Q_0} g(P,P_1)=0.$$

根据这事实得到

定理 5.1.4′ E^n 的有界开子集的一个边界点 Q_0 正则的充分而且必要的条件是存在一点 $P_1\in\Omega$ 使当 $\Omega\ni P\to Q_0$ 时以 P_1 为极的 Green 函数 $g(P,P_1)\to 0$.

对于一个固定点 $P_1\in\Omega$，使 $g(P,P_1)\to 0$ 不成立的边界点全体零容，因此我们得到

定理 5.1.5(Kellogg-Evans) E^n 的有界开子集 Ω 的不正则边界点是零容的 F_σ 集.

证明 只要证明它是 F_σ 集好了. 由于 $g(P,P_1)=U^{\varepsilon_{P_1}}(P)-U^{\eta_{P_1}}(P)$，$P_1\in\Omega$. $U^{\varepsilon_{P_1}}(P)$ 在 $B(\Omega)$ 上是连续的，$U^{\eta_{P_1}}(P)$ 在 $B(\Omega)$ 上是下半连续的，所以 $g(P,P_1)$ 在 $B(\Omega)$ 上是上半连续的.

假定 $Q\in B(\Omega)$ 不正则，那么由上半连续性，

$$g(Q,P_1)\geqslant \varlimsup_{P\to Q} g(P,P_1)>0.$$

反过来，如果 $Q\in B(\Omega)$ 正则，那么 $U^{\eta_{P_1}}(Q)=U^{\varepsilon_{P_1}}(Q)$. 因此就有 $g(Q,P_1)=0$. 所以，不正则点的全体就是

$$\{Q\,|\,g(Q,P_1)>0, Q\in B(\Omega)\}$$
$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{Q\,|\,g(Q,P_1)\geqslant 1/n,\ Q\in B(\Omega)\}.$$

每个点集 $\{Q\,|\,g(Q,P_1)\geqslant 1/n\}$ 是闭的，又 $B(\Omega)$ 也是闭的，所以等号右边的符号 $\bigcup$ 下的每个集合都是闭的. 因此它们的和集是 F_σ 集. ▌

定理 5.1.6 E^n 的一个闭子集 A 在一点 $Q_0\in B(A)$ 不瘦的充分而且必要的条件是 Q_0 有一个邻域 D，而 $D\backslash(D\cap A)$ 即 $D\backslash A$ 里存在一个正的上调和函数 v 有下面的性质：

$$\lim_{(D\backslash A)\ni P\to Q_0} v(P)=0. \tag{5.1.7}$$

证明 条件的必要性是容易看出来的，因为假定 A 在 Q_0 不

瘦，那么由定理 5.1.3，Q_0 是 $D\backslash A$ 的正则边界点，因此 $D\backslash A$ 的 Green 函数在 Q_0 的边界值是 0，这个 Green 函数就是一个所说的正上调和函数.

现在证明条件充分. 事实上假定这样一个正上调和函数 v 存在，我们可以取定一点 $Q\in(D\backslash A)$ 和一个充分小的正数 r，把 $v(P)$ 在 $S(Q,r)$ 上的极小值记作 a，又把 $D\backslash A$ 的以 Q 为极的 Green 函数 $g(P,Q)$ 在 $S(Q,r)$ 上的极大值记作 b，于是

$$\frac{a}{b}g(P,Q)\leqslant v(P),\quad P\in D\backslash A\backslash\overline{K(Q,r)}.$$

因此，当 $P\in D\backslash A$ 时，

$$0\leqslant \varliminf_{P\to Q_0}\frac{a}{b}g(P,Q)\leqslant \varlimsup_{P\to Q_0}\frac{a}{b}g(P,Q)\leqslant \varlimsup_{P\to Q_0}v(P)=0.$$

所以 Q_0 是 $D\backslash A$ 的正则边界点，因此 A 在 Q_0 不瘦. ▌

定理 5.1.7 一个闭集 A 在一点 $Q_0\in B(A)$ 不瘦的充分而且必要的条件是 Q_0 有一个邻域 D，在 $D\backslash A$ 里存在一个正的上调和函数 v 有下面性质：

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{(D\backslash A)\ni P\to Q_0}v(P)=0,\\ \displaystyle\inf_{P\in(D\backslash A)\backslash K(Q_0,\rho)}v(P)>0,\end{cases}\tag{5.1.8}$$

其中 ρ 是任何充分小的正数. 这样的 v 称作 $D\backslash A$ 在 Q_0 的一个**关闸**(barrier).

证明 条件的充分性是显然的，只需要证明必要性. 我们来看，如果 A 在 Q_0 不瘦，那么 Q_0 是 $D\backslash A$ 的正则边界点. r_{Q_0P} 关于 $P\in D$ 是下调和的. 用 r_{Q_0P} 在 $D\backslash A$ 的边界上的数值所作的 Wiener 解

$$v(P)=\int r_{Q_0Q}\mathrm{d}\eta_P(e_Q),\quad P\in D\backslash A,$$

就是一个正的调和函数满足(5.1.8)的第一关系式. 由于 $v(P)\geqslant r_{Q_0P}$ 成立，

$$\inf_{P\in D\setminus A\setminus K(Q_0,\rho)} v(P) \geqslant \inf_{P\in D\setminus A\setminus K(Q_0,\rho)} r_{Q_0P} = \rho > 0. \quad \blacksquare$$

备考 点集瘦的概念是由不正则边界点的研究产生的. Poincaré 首先发现,假定用 E^3 的子区域 Ω 的边界点 Q_0 当顶点可以做一个圆锥体包含在 $C(\Omega)$ 里的话,那么 Q_0 是正则的. 后来, Lebesgue 发现正则跟关闸存在是等价的,关闸这名字也是他取的. Bouligand 证明条件(5.1.8)可以用比较弱的条件(5.1.7)代替. 因此正则跟 Green 函数等于 0 是等价的.

§5.2 边界数据不连续的情况

假定函数 f 的支柱紧致,μ 是一个正测度. 把处处不小于 f 的有下界的下半连续函数的全体记作 $\mathscr{U}_f$. 定义

$$\overline{\int} f\mathrm{d}\mu = \inf_{g\in\mathscr{U}_f}\int g\mathrm{d}\mu$$

叫做 f 关于 μ 的**上积分**. 由定义知道 $\overline{\int} f\mathrm{d}\mu$ 可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$. 又定义

$$\underline{\int} f\mathrm{d}\mu = -\overline{\int} - f\mathrm{d}\mu$$

叫做 f 关于 μ 的**下积分**.

由定义知道 f 关于 μ 可积分的充分而且必要的条件是 f 关于 μ 的上下积分相等并且有限(读者自己作为习题证明).

还可以假定上面这定义中 $\mathscr{U}_f$ 仅仅包含那些在 f 的支柱和 μ 的支柱的交集上定义的有下界的下半连续函数,因为这种函数可以延拓成在全空间 E^n 上的有下界的下半连续函数. 这事实由下面的引理就可以知道.

引理 1(Baire) 如果一个函数 f 在一个紧致集里有下界并且下半连续,那么存在一列在这紧致集里连续的函数单调增加地收敛于它.

这引理的证明可以从通常的实函数论教科书中查到.

现在我们证明

定理 5.2.1 假定 f 在 E^n 的有界开子集 Ω 的边界 $B(\Omega)$ 上定义,那么

$$\overline{H}_f(P)=\overline{\int}_{B(\Omega)} f\mathrm{d}\eta_P,\quad \underline{H}_f(P)=\underline{\int}_{B(\Omega)} f\mathrm{d}\eta_P,\quad P\in\Omega$$

调和或者等于 $\pm\infty$. $\overline{H}_f$ 及 $\underline{H}_f$ 叫做以 f 为边界数据的**上解**及**下解**. 如果 $\overline{H}_f=\underline{H}_f$,即 f 关于 η_P 可积分,$\int f\mathrm{d}\eta_P$ 也记作 H_f.

证明 假定 f 连续,那么定理 5.2.1 的结论由定理 5.1.1 可以得到. 假定 f 有下界并且下半连续,那么由引理 1,存在一列连续函数 $\{f_m\}$,单调增加地收敛于它. 因此

$$\int f\mathrm{d}\eta_P=\lim_{m\to\infty}\int f_m\mathrm{d}\eta_P.$$

由于 $\{f_m\}$ 是单调增加列,$\left\{\int f_m\mathrm{d}\eta_P\right\}$ 是一列单调增加的调和函数. 因此 $\int f\mathrm{d}\eta_P$ 调和或者恒等于 $+\infty$,定理 5.2.1 的结论因此成立. 同样,f 有上界并且上半连续的情况也可以类似地证明. 对一般的 f,

$$\overline{\int} f\mathrm{d}\eta_P=\inf_{g\in\mathscr{U}_f}\int g\mathrm{d}\eta_P,\quad P\in\Omega.$$

因此,对固定的一点 $P_0\in\Omega$,存在一列 $\{g_m\}\subseteq\mathscr{U}_f$,使

$$\lim_{m\to\infty}\int g_m\mathrm{d}\eta_{P_0}=\overline{\int} f\mathrm{d}\eta_{P_0}.$$

不妨假定 $\{g_m\}$ 是一个单调减小列. 不然的话,取 $g_m'=\inf(g_1,g_2,\cdots,g_m)\in\mathscr{U}_f$ 代替 g_m 好了. 于是 $\left\{\int g_m\mathrm{d}\eta_P\right\}$ 是一个单调减小列. 由前一段的证明,$\int g_m\mathrm{d}\eta_P$ 调和或者恒等于 ∞,所以 $\lim\limits_{m\to\infty}\int g_m\mathrm{d}\eta_P$ 调和或者恒等于 $\pm\infty$.

现在要证明对每一点 $P\in\Omega$,有

$$\lim_{m\to\infty}\int g_m \mathrm{d}\eta_P = \overline{\int} f \mathrm{d}\eta_P. \tag{5.2.1}$$

显然，对任何一点 $P_1\in\Omega$，

$$\lim_{m\to\infty}\int g_m \mathrm{d}\eta_{P_1} \geqslant \overline{\int} f \mathrm{d}\eta_{P_1}.$$

对固定的 P_1，由上面同样理由，存在一个单调减小列 $\{g'_m\}\subseteq\mathscr{U}_f$ 使

$$\lim_{m\to\infty}\int g'_m \mathrm{d}\eta_{P_1} = \overline{\int} f \mathrm{d}\eta_{P_1}.$$

显然可以假定 $g'_m\leqslant g_m$，否则用$\inf(g'_m,g_m)$ 代替g'_m 好了. 于是

$$\lim_{m\to\infty}\int g'_m \mathrm{d}\eta_P \leqslant \lim_{m\to\infty}\int g_m \mathrm{d}\eta_P, \quad P\in\Omega.$$

不等号左右是两个调和或者恒等于$\pm\infty$的函数，前者不超过后者，但是在 $P=P_0$ 时必须相等. 所以对任何 P 二者相等，特别对 $P=P_1$ 如此. 当 $P=P_1$ 时，前者就是$\overline{\int} f \mathrm{d}\eta_{P_1}$，这说明(5.2.1) 成立. 关于$\overline{\int} f \mathrm{d}\eta_P$ 的 结论已经证明完毕.

由于 $\underline{\int} f \mathrm{d}\eta_P = -\overline{\int} - f \mathrm{d}\eta_P$，定理的结论自然成立. ▌

由定理 5.2.1 得到调和测度的下列重要性质.

定理 5.2.2 假定 Ω 是 E^n 的一个有界开子集，$A\subseteq B(\Omega)$，那么 A 的内、外调和测度

$$\underline{\eta}_P(A) = \underline{\int} \chi_A \mathrm{d}\eta_P, \quad \overline{\eta}_P(A) = \overline{\int} \chi_A \mathrm{d}\eta_P$$

关于 $P\in\Omega$ 是调和的，并且

$$0\leqslant \underline{\eta}_P(A)\leqslant 1, \quad 0\leqslant\overline{\eta}_P(A)\leqslant 1, \quad P\in\Omega;$$

进一步当 Q 是正则边界点的时候，用 $\overline{\underline{\eta}}_P(A)$ 表示内或外调和测度，则

$$\lim_{\Omega \ni P \to Q} \bar{\underline{\eta}}_P(A) = \begin{cases} 1, & \text{当 } Q \text{ 是 } A \text{ 相对于 } B(\Omega) \text{ 的内点}, \\ 0, & \text{当 } Q \text{ 是 } A \text{ 相对于 } B(\Omega) \text{ 的外点}. \end{cases}$$

证明 $\bar{\underline{\eta}}_P(A)$ 的调和性是定理 5.2.1 的直接推论. 它们满足上述不等式是因为调和测度的总质量等于 1. 至于最后的边界性质那是由定理 5.1.2 和浑收敛的性质得到的. ▌

推论 1 假定 Ω 是 E^n 的一个有界开子集，$A \subseteq B(\Omega)$，存在一点 $P_0 \in \Omega$，使 $\underline{\eta}_{P_0}(A) = 0$（或者 $\bar{\eta}_{P_0}(A) = 0$），那么

$$\underline{\eta}_P(A) = 0, \quad P \in \Omega \quad (\text{或 } \bar{\eta}_P(A) = 0,\ P \in \Omega).$$

证明 对调和函数 $\bar{\underline{\eta}}_P(A)$ 应用极小值原理. ▌

定理 5.2.3 假定 f 是在 E^n 的有界开子集 Ω 的边界 $B(\Omega)$ 上定义的函数，Q 是 Ω 的正则边界点，在 Q 的任何一个相对于 $B(\Omega)$ 的邻域以外，f 关于调和测度几乎有上界[①]，那么

$$\overline{\lim_{\Omega \ni P \to Q}}\, \overline{H}_f(P) \leqslant \overline{\lim_{B(\Omega) \ni Q' \to Q}}\, f(Q'). \tag{5.2.2}$$

证明 因 $\overline{H}_f(P) = \overline{\int} f \mathrm{d}\eta_P$，任意取 Q 的一个相对于 $B(\Omega)$ 的邻域 W，

$$\overline{H}_f(P) = \overline{\int}_{B(\Omega)\setminus W} f \mathrm{d}\eta_P + \overline{\int}_W f \mathrm{d}\eta_P.$$

当 $P \to Q$ 时，$\eta_P(B(\Omega)\setminus W) \to 0$，而 f 是几乎有上界的，所以右边第一项的上极限非正. 此外

$$\overline{\int}_W f \mathrm{d}\eta_P \leqslant \sup_{Q' \in W} f(Q'),$$

因此

$$\overline{\lim_{P \to Q}}\, \overline{H}_f(P) \leqslant \sup_{Q' \in W} f(Q').$$

无限缩小 W 的直径，可得到(5.2.2). ▌

把定理 5.2.3 的假设中的上界换作下界，把(5.2.2)中所有

---

① 就是除去一个调和测度下的零集以后，在所余的集合上，f 有上界.

"上横线"改作"下横线",并且把不等号反向,就得到相应的另一个结论了.

§5.3 Brelot 关于"干脆性"的理论

定理 5.2.3 并不能用边界行为充分地说明 $\overline{H}_f$ 和$\underline{H}_f$的特点,而作为边界值问题的一般理论,这样的说明是应该有的.下面介绍 Brelot 对这个问题的说法.不过由于我们所采用的逻辑系统,我们做的证明跟 Brelot 本人的不一样,这种差异的本质以后再谈.

假定 Ω 是 E^n 的一个有界开子集,f 在 $B(\Omega)$上定义.用 Φ_f^Ω 或 Φ_f 表示$+\infty$和那些在 Ω 里上调和、有下界、并且满足下面条件的函数 u 的全体:对 Ω 的每一个正则边界点 Q,

$$\varliminf_{\Omega \ni P\to Q\in B(\Omega)} u(P) \geqslant f(Q).$$

假定 $-u\in\Phi_{-f}$,就说 $u\in\Psi_f$ 或 Ψ_f^Ω.

定理 5.3.1

$$\overline{H}_f(P) = \inf_{u\in\Phi_f} u(P), \quad \underline{H}_f(P) = \sup_{u\in\Psi_f} u(P), \quad P\in\Omega.$$

为了证明定理 5.3.1,需要下面的引理.

引理 1 假定 u 在 E^n 的一个开集 D(不一定有界)中定义.令

$$f(Q) = \varliminf_{D\ni P\to Q} u(P), \quad Q\in B(D),$$

那么 $f(Q)$下半连续.

证明 任意取一点 $Q_0\in B(D)$,存在一个收敛于 Q_0 的点列 $\{Q_m\}\subseteq B(D)$,使

$$\lim_{m\to\infty} f(Q_m) = \varliminf_{B(D)\ni Q\to Q_0} f(Q).$$

由 $f(Q_m)$ 的定义知道,对任意取定的正数 ε,存在 $P_m\in\Omega$,$r_{P_mQ_m}<1/m$,并且 $u(P_m)<f(Q_m)+\varepsilon$. 所以

$$\begin{aligned}\varliminf_{B(D)\ni Q\to Q_0} f(Q) &= \lim_{m\to\infty} f(Q_m) \geqslant \varliminf_{m\to\infty} u(P_m) - \varepsilon \\ &\geqslant \varliminf_{D\ni P\to Q_0} u(P) - \varepsilon = f(Q_0) - \varepsilon.\end{aligned}$$

ϵ 是任意的正数，所以 $\underline{\lim}_{B(D)\ni Q\to Q_0} f(Q)\geqslant f(Q_0)$. ∎

定理 5.3.1 的证明 如果 f 是连续的，那么 $H_f\in\Phi_f, H_f\in\Psi_f$，因此这定理的结论成立. 假定 f 有下界并且下半连续，那么由定理 5.2.3，$H_f\in\Phi_f$，所以

$$H_f\geqslant\inf_{u\in\Phi_f} u. \tag{5.3.1}$$

另一方面，存在一列单调增加的连续函数 $g_m(P)$ 收敛于 f. 于是由 Lebesgue 收敛定理，

$$H_f=\lim_{m\to\infty} H_{g_m}.$$

因 $H_{g_m}\in\Psi_{g_m}\subseteq\Psi_f$，所以

$$H_f\leqslant\sup_{u\in\Psi_f} u\leqslant\inf_{u\in\Phi_f} u. \tag{5.3.2}$$

由(5.3.1)和(5.3.2)得到定理的结论.

现在假定 f 是任意的. 由定理 5.2.1 的证明知道存在一列单调减小的函数 $f_m\in\mathscr{U}_f$，使

$$\overline{H}_f=\lim_{m\to\infty} H_{f_m}.$$

由前一段定理证明知道，$H_{f_m}\in\Phi_{f_m}\subseteq\Phi_f$. 所以得到

$$\overline{H}_f\geqslant\inf_{u\in\Phi_f} u. \tag{5.3.3}$$

另外一方面，对任意取定的一点 $P_0\in\Omega$ 和一个正数 ϵ，存在一个 $v\in\Phi_f$ 使

$$\inf_{u\in\Phi_f} u(P_0)>v(P_0)-\epsilon.$$

$v(P)$ 在正则边界点的下极限不小于 f. 由定理 4.3.1 存在一个正的上调和函数 w 在每个不正则点等于 $+\infty$ 而在 Ω 里处处有限. 因此取充分小的正数 ρ，又定义上调和函数 $v_1=v+\rho w$，那么

$$\inf_{u\in\Phi_f} u(P_0)>v_1(P_0)-\epsilon. \tag{5.3.4}$$

而且由于 w 的性质，对任何一个边界点 Q，下式成立：

$$v_1(Q)=\underline{\lim}_{\Omega\ni P\to Q\in B(\Omega)} v_1(P)\geqslant f(Q).$$

因此 $v_1\in\mathscr{U}_f$，因此 $H_{v_1}\geqslant\overline{H}_f$. 根据前面关于下半连续函数的情况

的结论，$H_{v_1}=\inf\limits_{v\in\Phi_{v_1}} v$ 且显然 $v_1\in\Phi_{v_1}$. 因此 $v_1\geqslant H_{v_1}$，特别是

$$v_1(P_0)\geqslant H_{v_1}(P_0)\geqslant \overline{H}_f(P_0). \tag{5.3.5}$$

由(5.3.4)和(5.3.5)可得到

$$\inf_{u\in\Phi_f} u(P_0)\geqslant \overline{H}_f(P_0)-\varepsilon.$$

P_0 和 ε 可以任意取，所以得到

$$\inf_{u\in\Phi_f} u\geqslant \overline{H}_f. \tag{5.3.6}$$

由(5.3.3)和(5.3.6)得到

$$\overline{H}_f=\inf_{u\in\Phi_f} u.$$

于是由定义又得到

$$\underline{H}_f=\sup_{u\in\Psi_f} u. \quad \blacksquare$$

利用上面证明中辅助函数 w 的想法，实际上我们证明了下面的事实. 假定用 Φ'_f 表示具备下面条件的函数 u 的全体：

(1) u 在 Ω 里上调和并且有下界；

(2) 对每一点 $Q\in B(\Omega)$，$\varliminf\limits_{\Omega\ni P\to Q} u(P)\geqslant f(Q)$.

如果 $-u\in\Phi'_{-f}$，就说 $u\in\Psi'_f$.

从上面定理 5.3.1 的证明中看到

$$\inf_{u\in\Phi_f} u=\inf_{u'\in\Phi'_f} u'.$$

因此得到

定理 5.3.2(**Brelot**) 对一个在 E^n 的有界开子集的边界上定义的函数 f，

$$\overline{H}_f=\inf_{u\in\Phi'_f} u,\quad \underline{H}_f=\sup_{u\in\Psi'_f} u.$$

按照 Brelot 的说法，如果 $-\infty<\inf\limits_{u\in\Phi_f} u=\sup\limits_{u'\in\Psi_f} u'<\infty$，那么说 f 是**干脆的**(resolutive).

由定理 5.3.1 得到

推论 1 一个在 E^n 的有界开子集 Ω 的边界 $B(\Omega)$上定义的函数 f 干脆的充分而且必要的条件是关于 $B(\Omega)$的调和测度 $\eta_P(P\in$

Ω)可积分.

由 Nikodym 定理,推论 1 中的充分条件可以改为"存在一点 $P_0\in\Omega$,f 关于 η_{P_0} 可积分".

习　　题

证明:如果 u 在有界开集 Ω 里有界调和,且

$$\lim_{\Omega\ni P\to Q\in B(\Omega)} u(P)=f(Q)$$

似乎处处存在,那么 $u=H_f$.

§5.4　关于调和测度下的零集

利用前面的理论可以加强极大值原理和 Wiener 解的唯一性定理等等.

定理 5.4.1　假定一个函数 u 在 E^n 的有界开子集 Ω 里下调和而且有上界,E 是 $B(\Omega)$的一个零内调和测度的子集. 如果存在常数 M 使对每一点 $Q\in B(\Omega)\setminus E$,

$$\overline{\lim_{\Omega\ni P\to Q}}\, u(P)\leqslant M,$$

那么当 $P\in\Omega$ 时,$u(P)\leqslant M$.

证明　令

$$f(Q)=\overline{\lim_{\Omega\ni P\to Q}}\, u(P),\quad Q\in B(\Omega),$$

那么当 $Q\in B(\Omega)\setminus E$ 时,$f(Q)\leqslant M$. 不妨假定 E 是零调和测度的. 因为 $f(Q)$上半连续,使 $f(Q)>M$ 的点 Q 的全体必须是(B)集. 于是

$$H_f(P)=\int f\mathrm{d}\eta_P\leqslant\int M\mathrm{d}\eta_P=M,\quad P\in\Omega.$$

可是 $u\in\Psi_f$,所以

$$u(P)\leqslant H_f(P)\leqslant M,\quad P\in\Omega.\quad ▌$$

由定理 5.4.1 可以把 §4.1 各个定理相应地推广如下.

推论 1 假定 u 和 v 各是 E^n 的有界开子集 Ω 里的一个下调和函数和一个上调和函数，$u-v$ 有上界，E 是 $B(\Omega)$ 的一个零内调和测度的点集，对每一点 $Q\in B(\Omega)\setminus E$，

$$\overline{\lim_{\Omega\ni P\to Q}}\ \{u(P)-v(P)\}\leqslant 0,$$

那么当 $P\in\Omega$ 时，$u(P)\leqslant v(P)$.

推论 2 定理 4.3.3 的假设中的"近乎处处"可以改为"除了一个零内调和测度的点集外".

此外还可以得到 Dirichlet 问题的有界解的更强的唯一性定理如下.

定理 5.4.2 假定 Ω 是 E^n 的一个有界开子集，函数 f 在 $B(\Omega)$ 上连续，那么，在 $B(\Omega)$ 上除了一个零内调和测度的点集外处处以 f 为边界值而在 Ω 里有界调和的函数是唯一的.

上面这些定理提到零内调和测度集，不过像定理 5.4.1 的证明中说的那样，实际上考虑的是零调和测度集. 像关于零容点集的 Cartan 定理(定理 4.3.1)一样，零调和测度也有类似的性质.

定理 5.4.3 假定 Ω 是 E^n 的有界开子集，E 是 $B(\Omega)$ 的一个子集，那么 E 是零调和测度集的充分而且必要的条件是存在一个函数 u，在 Ω 里为正并且上调和，而

$$\lim_{\Omega\ni P\to Q} u(P)=+\infty,\quad Q\in E.$$

证明 *必要性* 用 χ_E 表示 E 的特征函数，那么当 $P\in\Omega$ 时，$\overline{H}_{\chi_E}(P)=0$. 因此，对任何一个固定点 $P_0\in\Omega$ 和任意一个正数 ϵ，存在一个正上调和函数 $v_n\in\Phi'_{\chi_E}$，使

$$v_n(P_0)<\frac{\epsilon}{2^n},\quad n=1,2,\cdots.$$

令 $u=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，那么 $0\leqslant u(P_0)<\epsilon$. 所以 u 在 Ω 里为正而且不恒等于 ∞，因此上调和. 可是对每一点 $Q\in E$，

$$\lim_{\Omega\ni P\to Q} u\geqslant \lim_{\Omega\ni P\to Q}\sum_{n=1}^{N}v_n\geqslant\sum_{n=1}^{N}\lim_{\Omega\ni P\to Q}v_n$$

$$\geqslant \underbrace{\chi_E(Q) + \cdots + \chi_E(Q)}_{共N项} = N.$$

由于 N 可任意大，条件的必要性得到证明.

充分性　假定这样的 u 存在，那么对任何正数 ε，都有 $\varepsilon u \in \Phi_{\chi_E}$. 假定一点 $P \in \Omega$ 使 $u(P) < \infty$，那么

$$\bar{\eta}_P(E) = \overline{H}_{\chi_E}(P) = \inf_{v \in \Phi_{\chi_E}} v(P) \leqslant \inf_{\varepsilon} \varepsilon u(P) = 0. \quad ▌$$

显然可以利用定理 5.4.3 给定理 5.4.1，定理 5.4.2 及推论 1、推论 2 以新的证明，就如同 §4.3 利用关于零容点集的 Cartan 定理一样.

一个区域的边界的子集如果零容，那么当然是零调和测度的. 此结论倒过来说不对. 但由定理 5.4.3 却可以得到定理 5.4.4. 假定 Ω 是一个开集，$E \subseteq B(\Omega)$，E 有一个邻域 $G \subset \Omega \cup E$，那么 E 称作 Ω 的一个**内藏的边界部分**.

定理 5.4.4　E^n 的一个有界开子集 Ω 的一个内藏的边界部分 E 为零调和测度集的充分而且必要的条件是零容.

证明　必要性　由定理 5.4.3 存在一个在 Ω 里为正而且上调和的函数 u 使对每一点 $Q \in E$，$\lim\limits_{\Omega \ni P \to Q} u(P) = +\infty$ 成立. 对于 $Q \in E$ 定义 $u(Q) = +\infty$，那么 u 在 $\Omega \cup E$ 里为正、上调和，因此由定理 4.3.1，E 零容.

充分性显然. ▌

定理 5.4.5　一个点集 E 零容的充分而且必要的条件是存在一个函数 u 在 E 的一个邻域 G 里为正、上调和，并且

$$u(Q) = +\infty, \quad Q \in E.$$

证明　条件的必要性很明显. 为了证明充分性，我们注意在条件所说的那个邻域 G 中使 $u(P) = +\infty$ 的点 P 的全体 S 是一个 G_δ 集，因为

$$\{P \mid u(P) = +\infty, P \in G\} = \bigcap_{N=1}^{\infty} \{P \mid u(P) > N, P \in G\}.$$

只要证明 S 零容就行了，因为 $E\subseteq S$. G_δ 集可定容，所以只要证明 S 零内容好了. 任意取它的一个紧致子集 $C\subseteq S$，作 C 的一个有界邻域 $D\subset\overline{D}\subset G$，那么存在分布在 D 上的正测度 μ 使

$$u(P)=U^{\mu}(P)+v(P),\quad P\in D,$$

这里 $v(P)$ 在 D 里调和. 由 S 的定义知道

$$U^{\mu}(Q)=u(Q)-v(Q)=+\infty,\quad Q\in C.$$

所以 E 零容. ▌

关于内藏的零调和测度边界部分还有下面的延拓定理.

定理 5.4.6 假定 u 在开集 Ω 里上调和，在 Ω 的一个零调和测度的内藏边界部分 E 的一个邻域里(除去 E)有下界，那么 u 可以延拓为一个唯一的在 $\Omega\cup E$ 里上调和的函数.

证明 令

$$u(Q)=\varliminf_{\Omega\ni P\to Q}u(P),\quad Q\in E,\tag{5.4.1}$$

那么 u 在 $\Omega\cup E$ 里下半连续. 现在任意取一点 $Q_0\in E$，取充分小的正数 r，使 $\overline{K(Q_0,r)}\subset\Omega\cup E$，并且 u 在 $\overline{K(Q_0,r)}$ 里有下界. 把 $\overline{K(Q_0,r)}$ 的调和测度记作 η_P，$P\in K(Q_0,r)$. 由于 $E\cap K(Q_0,r)$ 是零容的，$K(Q_0,r)\setminus(E\cap K(Q_0,r))$ 即 $K(Q_0,r)\setminus E$ 的调和测度 $\eta'_P=\eta_P$，$P\in K(Q_0,r)\setminus(E\cap K(Q_0,r))$，这是因为把 ε_P 扫到 $S(Q_0,r)\cup(E\cap K(Q_0,r))$ 上去，然后再把扫在 $E\cap K(Q_0,r)$ 上的那部分质量扫到 $S(Q_0,r)$ 上去就得到 η_P，可是第二次扫是空扫.

令

$$H_u(P)=\int u\,\mathrm{d}\eta'_P,\quad P\in K(Q_0,r)\setminus E,$$

那么 $H_u(P)$ 调和. 因为 u 在 $K(Q_0,r)\setminus E$ 里上调和，有下界，而且在 $S(Q_0,r)\cup(E\cap K(Q_0,r))$ 上的下极限不小于 u，即当 $P\in K(Q_0,r)\setminus E$ 趋于 $Q\in S(Q_0,r)\cup(E\cap K(Q_0,r))$ 时，$\varliminf_{P\to Q}u(P)\geqslant u(Q)$，所以

$$H_u(P)\leqslant u(P),\quad P\in K(Q_0,r)\setminus E.$$

因此

$$u(Q_0)=\varliminf_{\Omega\ni P\to Q_0}u(P)\geqslant\varliminf_{\Omega\ni P\to Q_0}H_u(P)$$

$$=\varliminf_{\Omega\ni P\to Q_0}\int u\mathrm{d}\eta'_P=\varliminf_{\Omega\ni P\to Q_0}\int u\mathrm{d}\eta_P.$$

但是$\int u\mathrm{d}\eta_P$关于$P\in K(Q_0,r)$调和，因此在Q_0连续. 从而有

$$\varliminf_{P\to Q_0}\int u\mathrm{d}\eta_P=\int u\mathrm{d}\eta_{Q_0}.$$

所以

$$u(Q_0)\geqslant\int u\mathrm{d}\eta_{Q_0}=\int u\mathrm{d}\epsilon_{Q_0,r}.$$

因此u在Q_0上调和.

这样的延拓显然是唯一的，因为上调和函数必满足(5.4.1). ▌

由定理 5.4.6 立刻得到关于下调和函数的相应结论.

调和测度的统计力学的意义 上面说明了零调和测度集的各种性质. 调和测度可以用 Brown 运动过程中分子碰壁的概率分布来比拟，这种比拟有助于我们更直观地认识零调和测度集的几何形象.

假定Ω是一个有界区域，里面有许多气体分子在做 Brown 运动. 任意取一个(B)集$E\subseteq B(\Omega)$，我们把在一点$P\in\Omega$的一个分子在它的运动过程中正好在E里碰到边界的概率记作$\mu_P(E)$. 任意变动(B)集E，得到一个分布在$B(\Omega)$上的测度μ_P. 特别取E作$B(\Omega)$，那么概率当然是 1，所以无论对哪一点$P\in\Omega$，$\mu_P(B(\Omega))=1$. 此外，如果$P\in E$，那分子既然在P点，它就已经击中E了，所以当$P\in E$时，$\mu_P(E)=1$. 又如果$P\in B(\Omega)\setminus E$，那么分子在$P$点就表示已经击不中$E$，所以当$P\in B(\Omega)\setminus E$时，$\mu_P(E)=0$.

在理想情况下，$\mu_P(E)$这个概率完全由P和E决定，也就是说，像分子在什么时候到达、或者通过什么路线到达P点等等，都是没有关系的事情. 因此当E固定的时候，$\mu_P(E)$是$P\in\Omega$的函

数.

再作一个球面 $S(P_0,r)$. 分子从 P_0 出发总会穿越 $S(P_0,r)$. 如果不考虑重力等等的影响,那么分子从 $S(P_0,r)$ 的各个不同部分穿过 $S(P_0,r)$ 是同等可能的,只要这些不同的部分一样大. 因此在 $S(P_0,r)$ 的任意一个 (B) 子集 E' 穿过 $S(P_0,r)$ 的概率一定是 $\varepsilon_{P_0,r}(E')$. 现在假定把 $S(P_0,r)$ 分作 N 个直径很小的不重叠的 (B) 子集 E'_i, 在每个 E'_i 里任意取一点 Q_i. 假定 $\mu_P(E)$ 关于 P 连续,那么从 E'_i 里任意一点出发击中 $E\subseteq B(\Omega)$ 的概率跟从 Q_i 出发击中 E 的概率 $\mu_{Q_i}(E)$ 差不多. 因此分子由 P_0 出发,经过某个 E'_i 穿过 $S(P_0,r)$, 然后击中 E 的概率差不多是 $\varepsilon_{P_0,r}(E'_i)\mu_{Q_i}(E)$. 分子从 P_0 击中 E 总得经过 $S(P_0,r)$ 的某个 E'_i. 所以从 P_0 击中 E 这个事件可以看作从 P_0 经过 E'_1 或 $E'_2\cdots$ 或 E'_N 然后到 E 这样 N 个事件的和,于是前者的概率是后 N 个事件的概率的和. 近似地,

$$\mu_{P_0}(E)\approx\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_{P_0,r}(E'_i)\mu_{Q_i}(E).$$

取极限得到

$$\mu_{P_0}(E)=\int\mu_Q(E)\mathrm{d}\varepsilon_{P_0,r}(E'_Q).$$

这等式对任意 $P_0\in\Omega$ 和充分小的任何一个正数 r 都成立,所以 $\mu_P(E)$ 关于 P 调和.

这样我们看到

$$\mu_P(E)=\text{调和测度 }\eta_P(E).$$

特别,如果对一个 $D\subseteq B(\Omega)$, $\eta_P(D)=0$, 那么分子从 P 点出发撞到 D 中去的概率是 0, 所以 D 要不是很"瘦"就是处在"交通不便"的位置. 内藏的边界部分四面八方接触到 Ω, 如果它不太瘦,就一定比较容易达到,所以如果它是零调和测度集,那它一定是特别"瘦"的,定理 5.4.4 就说明这个事实. 至于不是内藏的部分,零调和测度也可能只表示它难以到达,不一定怎么瘦. 例如图 3 所表示的 $\boldsymbol{E}^2$ 的子区域的边界部分 $\overline{OA}$, 由于区域在它附近被无数多条直

线段所割裂，区域里的分子要撞到$\overline{OA}$是太不容易了. 我们以后会证明$\overline{OA}$的确是调和测度下的零集.

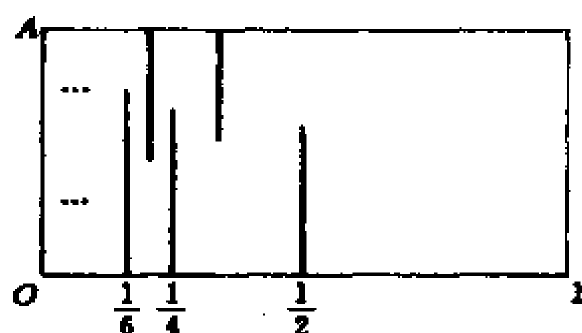


图 3

最后还可以从这个物理想法来看边界点的正则性. 如果 Q 是一个正则边界点，那么对 Q 的任何一个邻域(相对于边界)E，当 $P\to Q$ 时，$\eta_P(E)\to 1$. 这说明当 P 很接近于 Q 的时候，分子从 P 出发就几乎必然会撞在 Q 的附近. 可是如果 Q 不正则，那么无论分子已经怎样接近 Q，结果能否就撞在离 Q 很近的地方还是难说的. 这表示边界在不正则点附近总很"瘦".

§5.5 上下解在不正则边界点的细极限

现在研究上解 $\overline{H}_f$ 和下解 $\underline{H}_f$ 在不正则边界点附近的行为. 先证明

引理 1(Brelot) 假定闭集 A 在一点 Q_0 瘦，v 是在 Q_0 的一个邻域跟 $C(A)$的交集里定义的一个有下界的上调和的函数，那么 $\underset{C(A)\ni P\to Q_0}{\varphi\text{-}\lim}\ v(P)$ 存在(可能是$+\infty$).

证明 假定 $Q_0\in A'$，A'表示 A 的通常的导集，那么 Q_0 要不是 $C(A)$的内点就是 A 的孤立点. 在后面这情况下，$\{Q_0\}$是 $C(A)$的零容边界部分. 因此无论哪一种情况，v 都可以看作在 Q_0 的一个邻域里上调和. 因此 v 在 Q_0 细连续，所以有细极限.

假设 $Q_0\in A'$，那么存在一个正测度的位势 w，使

$$w(Q_0)<+\infty,\quad \lim_{A\ni P\to Q_0} w(P)=+\infty.$$

如果

$$\lim_{C(A)\ni P\to Q_0}(v(P)+w(P))=+\infty,$$

那么

$$\varphi\text{-}\lim_{C(A)\ni P\to Q_0}(v(P)+w(P))=+\infty. \tag{5.5.1}$$

可是 w 在 Q_0 是细连续的，

$$\varphi\text{-}\lim_{C(A)\ni P\to Q_0} w(P)=\varphi\text{-}\lim_{P\to Q_0} w(P)=w(Q_0)<+\infty.$$

所以由(5.5.1)得到

$$\varphi\text{-}\lim_{C(A)\ni P\to Q_0} v(P)=+\infty.$$

如果

$$\underline{\lim}_{C(A)\ni P\to Q_0}(v(P)+w(P))=b<+\infty,$$

那么对任何正数 $a>b$，Q_0 有一个邻域 V 使 $P\in(A\cap V)\setminus\{Q_0\}$ 时，$w(P)>a$. 不妨假定 v 是正的，不然的话，用 $v+M$(M 是充分大的常数)代替 v 好了. 于是对任何一点 $Q\in B(A)\cap V\subseteq A\cap V$，$Q\neq Q_0$，

$$\underline{\lim}_{C(A)\ni P\to Q}(v(P)+w(P))\geqslant\underline{\lim}_{C(A)\ni P\to Q} w(P)$$

$$\geqslant\underline{\lim}_{P\to Q} w(P)\geqslant w(Q)>a.$$

令

$$u_1(P)=\begin{cases}\min\{v(P)+w(P),a\}, & P\in C(A)\cap V\setminus\{Q_0\},\\ a, & P\in A\cap V\setminus\{Q_0\},\end{cases}$$

那么 $u_1(P)$ 在 $V\setminus\{Q_0\}$ 里上调和，并且在 $A\cap V\setminus\{Q_0\}$ 的一个邻域里等于常数 a. $\{Q_0\}$ 是 $V\setminus\{Q_0\}$ 的内藏的零容边界部分，所以 $u_1(P)$ 可以延拓为在整个 V 里上调和的函数，因此在 Q_0 细连续. 所以

$$\begin{aligned}\varphi\text{-}\lim_{C(A)\ni P\to Q_0} u_1(P) &= \varphi\text{-}\lim_{P\to Q_0} u_1(P) = u_1(Q_0)\\ &= \varliminf_{P\to Q_0} u_1(P) = \min\{\varliminf_{A\ni P\to Q_0} u_1(P), \varliminf_{C(A)\ni P\to Q_0} u_1(P)\}\\ &= \varliminf_{C(A)\ni P\to Q_0} u_1(P) = \min\{\varliminf_{C(A)\ni P\to Q_0}(v(P)+w(P)), a\}\\ &= b.\end{aligned}$$

因此 Q_0 有一个细邻域 D，使当 $P\in D\cap C(A)$ 时，$u_1(P)<a$，也就是当 $P\in D\cap C(A)$ 时，$u_1(P)=v(P)+w(P)$. 因此

$$\varphi\text{-}\lim_{C(A)\ni P\to Q_0}(v(P)+w(P)) = \varphi\text{-}\lim_{C(A)\ni P\to Q_0} u_1(P) = b.$$

现在 $\varphi\text{-}\lim\limits_{C(A)\ni P\to Q_0} w(P)$ 存在并且等于 $w(Q_0)<\infty$，所以，$\varphi\text{-}\lim\limits_{C(A)\ni P\to Q_0} v(P)$ 存在并且有限. ▌

由引理 1 可以证明

定理 5.5.1 假定 f 是在 E^n 的一个有界开子集 Ω 的边界 $B(\Omega)$ 上定义的函数，关于调和测度几乎处处有上界. Q_0 是 Ω 的一个不正则边界点，$\overline{H}_f$ 在 Q_0 的细极限记作 a. 那么

$$a\leqslant \varlimsup_{\Omega\ni P\to Q_0}\overline{H}_f(P)\leqslant \max\{a, \varlimsup_{B(\Omega)\ni Q\to Q_0} f(Q)\}. \quad (5.5.2)$$

证明 $\overline{H}_f$ 有上界并且下调和，所以由引理 1，$\overline{H}_f$ 在 Q_0 有细极限 a. 因此由定理 4.5.3，Ω 有一个子集 E 在 Q_0 瘦，使

$$\lim_{\Omega\setminus E\ni P\to Q_0}\overline{H}_f(P)=a. \quad (5.5.3)$$

因此，由上极限的定义知道(5.5.2)的前半部分成立. 再由定理 4.4.2 知道可以作一个开集 $W\supseteq E$ 而 W 在 Q_0 瘦. 不妨假定 $W\subseteq\Omega$，因为要不然可以取 $W\cap\Omega$ 代替 W. 定义

$$g(Q)=\begin{cases}\overline{H}_f(Q), & Q\in B(W)\cap\Omega,\\ f(Q), & Q\in B(W)\cap B(\Omega).\end{cases}$$

把 W 里以 g 为边界数据的上解记作 $\overline{H}_g^W=\inf\limits_{v\in\Phi_g^W} v$，我们证明

$$\overline{H}_g^W(P) = \overline{H}_f(P), \quad P \in W. \tag{5.5.4}$$

事实上，由定理 5.3.1 知道下式成立：

$$\overline{H}_g^W(P) \leqslant \overline{H}_f(P), \quad P \in W.$$

其次，假定存在一点 $P_0 \in W$，使 $\overline{H}_g^W(P_0) < \overline{H}_f(P_0)$，那么存在一个函数 $v_1 \in \Phi_g^W$ 使 $\overline{H}_g^W(P_0) < v_1(P_0) < \overline{H}_f(P_0)$ 成立. 于是

$$w(P) = \begin{cases} \min\{v_1(P), \overline{H}_f(P)\}, & P \in W, \\ \overline{H}_f(P), & P \in \Omega \setminus W \end{cases}$$

在 Ω 里有下界、上调和并且对每点 $Q \in B(\Omega)$，

$$\varliminf_{\Omega \ni P \to Q} (w(P) - \overline{H}_f(P)) \geqslant 0 \quad 或 \quad \varliminf_{\Omega \ni P \to Q} w(P) \geqslant f(Q).$$

因此，当 $P \in \Omega$ 时，$w(P) \geqslant \overline{H}_f(P)$. 由此有

$$\overline{H}_f(P_0) \leqslant w(P_0) = v_1(P_0) < \overline{H}_f(P_0).$$

这是不可能的. 所以(5.5.4)成立.

由于 W 在 Q_0 瘦，$C(W)$ 在 Q_0 不瘦，因此 Q_0 是 W 的一个正则边界点. 那么，由定理 5.2.3 可得

$$\begin{aligned} \varlimsup_{W \ni P \to Q_0} \overline{H}_g^W(P) &\leqslant \varlimsup_{B(W) \ni Q \to Q_0} g(Q) \\ &= \max\{\varlimsup_{\Omega \cap B(W) \ni P \to Q_0} \overline{H}_f(P), \varlimsup_{B(\Omega) \cap B(W) \ni Q \to Q_0} f(Q)\} \\ &= \max\{a, \varlimsup_{B(\Omega) \cap B(W) \ni Q \to Q_0} f(Q)\}. \end{aligned} \tag{5.5.5}$$

由(5.5.3)，(5.5.4)及(5.5.5)得到

$$\begin{aligned} \varlimsup_{\Omega \ni P \to Q_0} \overline{H}_f(P) &= \max\{\varlimsup_{\Omega \setminus W \ni P \to Q_0} \overline{H}_f(P), \varlimsup_{W \ni P \to Q_0} \overline{H}_g^W(P)\} \\ &\leqslant \max\{a, \varlimsup_{B(\Omega) \ni Q \to Q_0} f(Q)\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

把定理中的 f 改做 $-f$ 得到关于 $\underline{H}_f$ 的类似结果. 特别当 f 连续时，得到 Frostman-Keldysh 的结果：

$$\begin{aligned} \min(a, f(Q_0)) &\leqslant \varliminf_{\Omega \ni P \to Q_0} H_f(P) \\ &\leqslant \varlimsup_{\Omega \ni P \to Q_0} H_f(P) \leqslant \max\{a, f(Q_0)\}. \end{aligned} \tag{5.5.6}$$

再如果 Q_0 是正则点的聚点的话，那么(5.5.6)的第一个及最后一个不等号都变作等号.

对不正则边界点还可以做更深入的讨论. 假定开集 Ω 的 Green 函数是 $G(P,P_0)$，$(P,P_0)\in\bar{\Omega}\times\Omega$，那么对任何一个非负的实数 a，令

$$\Omega_a(P_0)=\Omega_a=\{P|G(P,P_0)>a\}.$$

在 $B(\Omega_a)$ 上，除了 P 可能是 Ω 的不正则边界点外，$G(P,P_0)=a$ 成立，因此 $B(\Omega_a)$ 称作以 P_0 为极的 Green 函数的 a **等位面.**

不正则边界点的特征细邻域 假定 Q 是有界开集 Ω 的一个不正则边界点，D 是 Q 的一个细邻域，使

$$\lim_{D\ni P\to Q}G(P,P_0)=G(Q,P_0)$$

成立，那么 D 称作 Q 相对于极 P_0 的一个**特征细邻域.**

由引理 1 和 Green 函数的细连续性知道相对于任何一个极 $P_0\in\Omega$，不正则边界点 Q 的特征细邻域总是存在的.

引理 2 假定 Q 是 E^n 的一个有界开子集 Ω 的不正则边界点，$n\geqslant2$，则对一点 $P_0\in\Omega$，Q 有一个特征细邻域 $D_0\supseteq\Omega_{G(Q,P_0)}(P_0)$，并且对任何一个非负的实数 $a<G(Q,P_0)$ 和 Q 的任何一个相对于 P_0 的特征细邻域 D，Q 有一个邻域 V 使 $V\cap D\subseteq\Omega_a$.

证明 要证明引理的前半结论，只要证明

$$\lim_{\Omega_{G(Q,P_0)}\ni P\to Q}G(P,P_0)=G(Q,P_0). \tag{5.5.7}$$

因为如果(5.5.7)成立，那么 Q 的任何一个相对于 P_0 的特征细邻域跟 $\Omega_{G(Q,P_0)}$ 的和集仍旧是 Q 的一个特征细邻域. 现在由于当 $P\in\Omega_{G(Q,P_0)}$ 时，$G(P,P_0)>G(Q,P_0)$，我们知道

$$\varliminf_{\Omega_{G(Q,P_0)}\ni P\to Q}G(P,P_0)\geqslant G(Q,P_0). \tag{5.5.8}$$

但是 $G(P,P_0)$ 在 $P=Q$ 是上半连续的，所以

$$\varlimsup_{P\to Q}G(P,P_0)\leqslant G(Q,P_0). \tag{5.5.9}$$

由(5.5.8)和(5.5.9)得到(5.5.7).

为了证明引理的后半结论，我们假定所说的 V 不存在，那么 Q 是 $D\backslash\Omega_a$ 的聚点，因此存在一点列 $\{P_m\}\subseteq D\backslash\Omega_a$ 收敛于 Q. 由于 $\{P_m\}\subseteq D$，必须有

$$\lim_{m\to\infty} G(P_m,P_0) = G(Q,P_0). \qquad (5.5.10)$$

又由于 $\{P_m\}\subseteq C(\Omega_a)$，又必须有

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} G(P_m,P_0) \leqslant a < G(Q,P_0). \qquad (5.5.11)$$

(5.5.10)和(5.5.11)不相容，所以 V 不存在的假设不成立. ▌

定理5.5.2 假定 Q 是 E^n 的有界开子集 Ω 的一个不正则边界点，$n\geqslant 2$，那么对 Q 的任何一个特征细邻域 D，当 $D\ni P\to Q$ 的时候，以 P 为极的调和测度 η_P 浑收敛于一个唯一的跟 D 的选择无关的测度 ν_Q，ν_Q 在任何一个零容集里不分布质量，并且

$$U^{\nu_Q}(P) = \begin{cases} U^{\varepsilon_Q}(P), & \text{当 } P \text{ 是 } \Omega \text{ 的外点或正则边界点,} \\ U^{\eta_P}(Q), & \text{当 } P\in\Omega. \end{cases} \qquad (5.5.12)$$

证明 假定点列 $\{Q_m\}\subseteq D$，并且 η_{Q_m} 浑收敛于一个测度 ν_Q，我们先证明 ν_Q 满足(5.5.12).

对 Ω 的任何一个外点 P，由于 U^{ε_P} 在 $B(\Omega)$ 上连续，

$$\begin{aligned} U^{\nu_Q}(P) &= \int U^{\varepsilon_P} d\nu_Q = \lim_{m\to\infty}\int U^{\varepsilon_P} d\eta_{Q_m} \\ &= \lim_{m\to\infty} U^{\eta_{Q_m}}(P) = \lim_{m\to\infty} U^{\varepsilon_{Q_m}}(P) = U^{\varepsilon_Q}(P). \end{aligned}$$

当 P 是 Ω 的一个正则边界点的时候，对任何正数 r，有

$$\begin{aligned} U^{\nu_Q}(P) &\geqslant \int U^{\varepsilon_{P,r}} d\nu_Q = \lim_{m\to\infty}\int U^{\varepsilon_{P,r}} d\eta_{Q_m} \\ &= \lim_{m\to\infty}\int U^{\eta_{Q_m}} d\varepsilon_{P,r}. \end{aligned} \qquad (5.5.13)$$

由于 P 正则，对任何正数 ε，可以取 r 充分小使

$$\sup_{Q'\in S(P,r)} \left| U^{\eta_{Q_m}}(Q') - U^{\varepsilon_{Q_m}}(P) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又可以取 N 充分大使

$$\sup_{m\geq N}\left|U^{\varepsilon_{Q_m}}(P)-U^{\varepsilon_Q}(P)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以由(5.5.13)得到，当 r 充分小时

$$U^{\nu_Q}(P)\geq\lim_{m\to\infty}\int U^{\eta_{Q_m}}\mathrm{d}\varepsilon_{P,r}\geq U^{\varepsilon_Q}(P)-\varepsilon.$$

因此，$U^{\nu_Q}(P)\geq U^{\varepsilon_Q}(P)$. 可是由浑收敛的性质知道

$$U^{\nu_Q}\leqslant\varliminf_{m\to\infty}U^{\eta_{Q_m}}\leqslant U^{\varepsilon_Q}$$

处处成立. 所以对每个正则边界点 P，$U^{\nu_Q}(P)=U^{\varepsilon_Q}(P)$ 都成立.

再考虑 $P\in\Omega$ 的情况. 这时候由于 U^{ε_P}连续，

$$U^{\nu_Q}(P)=\lim_{m\to\infty}U^{\eta_{Q_m}}(P)=\lim_{m\to\infty}U^{\eta_P}(Q_m)\geqslant U^{\eta_P}(Q). \qquad (5.5.14)$$

现在假定 D 是以 $P_0\in\Omega$ 为极的特征细邻域，那么

$$\lim_{m\to\infty}G(Q_m,P_0)=G(Q,P_0).$$

所以，$\lim_{m\to\infty}U^{\eta_{Q_m}}(P_0)=U^{\eta_{P_0}}(Q)$. 因此由(5.5.14)得到

$$U^{\nu_Q}(P_0)=U^{\eta_{P_0}}(Q). \qquad (5.5.15)$$

注意，$U^{\eta_P}(Q)=\int U^{\varepsilon_Q}\mathrm{d}\eta_P$ 是以 U^{ε_Q} 为边界数据的 Wiener 解，所以关于 $P\in\Omega$ 调和. $U^{\nu_Q}(P)$关于 $P\in\Omega$ 也调和. 因此由(5.5.14)，(5.5.15)得到

$$U^{\nu_Q}(P)=U^{\eta_P}(Q),\quad P\in\Omega.$$

这样就证明了对任何$\{Q_m\}\subseteq D$，假定 η_{Q_m}浑收敛的话，η_{Q_m}的极限满足(5.5.12). 满足(5.5.12)的测度ν_Q是唯一决定的，所以由定理 1.7.3 知道当 $D\ni P\to Q$ 的时候，η_P 浑收敛于这个唯一的测度 ν_Q.

ν_Q 既然必须满足(5.5.12)，所以跟特征细邻域 D 的选择也无关.

最后，由于 $U^{\nu_Q}\leqslant U^{\varepsilon_Q}$处处成立，$\nu_Q$ 在任何一个不包含 Q 的零容集里不分布质量，在$\{Q\}$里也不分布质量. 事实上，如果

$$\nu_Q=k\varepsilon_Q+\mu,$$

其中

$$k > 0, \mu \geqslant 0, \mu(\{Q\}) = 0,$$

那么下式在$C(\Omega)$上似乎处处成立：

$$U^{\mu}(P) = (1-k)U^{\varepsilon_Q}(P).$$

μ 在任何零容集里不分布质量. 所以对 $P \in \Omega$,

$$U^{\mu}(P) = \int U^{\varepsilon_P} d\mu = \int U^{\eta_P} d\mu = \int U^{\mu} d\eta_P$$

$$= (1-k)\int U^{\varepsilon_Q} d\eta_P = (1-k)U^{\eta_P}(Q).$$

因此

$$U^{\nu_Q}(P) = kU^{\varepsilon_Q}(P) + (1-k)U^{\eta_P}(Q), \quad P \in \Omega.$$

这跟(5.5.12)的第二个式子矛盾.

因此知道,ν_Q 在任何零容集里不分布质量. ▎

把定理 5.5.2 里的 ν_Q 称作 Q 的**特征测度**.

定理 5.5.3 假定 f 是 E^n 的有界开子集 Ω 的边界 $B(\Omega)$上的连续函数,Q 是 Ω 的一个不正则边界点,那么

$$\lim_{\Omega \cap D \ni P \to Q} H_f(P) = \int f d\nu_Q, \tag{5.5.16}$$

这里 D 和 ν_Q 分别表示 Q 的特征细邻域和特征测度.

证明 由定理5.5.2,当$D \cap \Omega \ni P \to Q$的时候,$\eta_P$ 浑收敛于 ν_Q,因此(5.5.16)成立. ▎

f 不连续的情况也有相应的结论. 将另文详细说明讨论,这里不谈.

Frostman 曾经通过 $\varepsilon_{Q,r}$的扫除得到特征测度的概念(他谈的是一般的 α 级位势),因此他不是通过我们上面所用的 η_{Q_m}的扫除,所以没有谈到这个跟 f 无关的特征细邻域的存在.

另一方面,M. V. Keldysh 曾经通过 Banach 空间的观点得到 ν_Q. 把 $B(\Omega)$上连续函数 f 全体记作 $\mathscr{C}$,$\mathscr{C}$ 里的每个元素 f 用 $\|f\| = \sup_{P \in B(\Omega)} |f(P)|$ 当范数. 这样 $\mathscr{C}$ 成了一个 Banach 空间. 假定 $f \in \mathscr{C}$,那么 H_f 在 Ω 的一个不正则边界点 Q 的细极限 $\nu_Q^*(f)$

显然是定义在 $\mathscr{C}$ 上的连续的线性函数或者泛函. 于是根据 F. Riesz 的表示定理,存在一个测度 ν_Q 使

$$\nu_Q^*(f) = \int f \mathrm{d}\nu_Q.$$

现在对所有的不正则边界点 Q,把 $\mathscr{C}$ 上的线性泛函

$$\varphi_Q(f) = \int f \mathrm{d}(\varepsilon_Q - \nu_Q), \quad f \in \mathscr{C}$$

的全体记为 Φ. 规定当 $\varepsilon_{Q_m} - \nu_{Q_m}$ 浑收敛于 $\varepsilon_Q - \nu_Q$ 时,说泛函列 $\{\varphi_{Q_m}\}$ 收敛于 $\{\varphi_Q\}$,那么 Φ 就有了一个拓扑了,这拓扑叫 Φ 的**弱拓扑**.

一个拓扑空间如果有一个可列的子集处处稠密(其包等于全空间),那么说这空间是**可分的**(seperable). Banach 定理指出:一个可分的 Banach 空间上一族连续的线性泛函在弱拓扑下是可分的(在后边的附注中将给出它的证明).

根据这个定理,知道 Φ 是可分的,因为 $\mathscr{C}$ 是可分的. 于是得到

定理 5.5.4(Keldysh) E^n 的有界开子集 Ω 有可列个不正则边界点 $\{Q_m\}$. 对任何在 $B(\Omega)$ 上定义的连续函数 f,如果

$$\varphi\text{-}\lim_{\Omega \ni P \to Q_m} H_f(P) = f(Q_m), \quad m = 1, 2, \cdots$$

成立,那么对任何一个不正则边界点 Q,下式成立:

$$\lim_{\Omega \ni P \to Q} H_f(P) = f(Q). \tag{5.5.17}$$

证明 由 Banach 定理,Φ 有处处稠密的可列子集 $\{\varphi_{Q_m}\}$. 要是 $B(\Omega)$ 上的连续函数 f 使

$$\varphi\text{-}\lim_{\Omega \ni P \to Q_m} H_f(P) = f(Q_m), \quad m = 1, 2, \cdots$$

成立,那么 $\varphi_{Q_m}(f) = 0$. 对任何一个不正则边界点 Q,φ_Q 是一个子列 $\{\varphi_{Q_{m_i}}\}$ 在弱拓扑下的极限,所以 $\varphi_Q(f) = \lim\limits_{m_i \to \infty} \varphi_{Q_{m_i}}(f) = 0$. 因此

$$\varphi\text{-}\lim_{\Omega \ni P \to Q} H_f(P) = \int f \mathrm{d}\nu_Q = f(Q).$$

所以(5.5.17)成立. ▌

附注 Banach 定理的证明

首先我们注意，假定 f 是把一个 Banach 空间 B 映入一个候补 Banach 空间 $\widetilde{B}$ 去的连续线性映射（连续线性算子），那么存在一个常数 M_f，使对 B 里任何两点 x_1 和 x_2，

$$\| f(x_1) - f(x_2) \| \leqslant M_f \| x_1 - x_2 \|. \tag{5.5.18}$$

事实上，不等式左边就是 $\| f(x_1 - x_2) \|$，因此只要证明对任何 $x \in B$，$\| f(x) \| \leqslant M_f \| x \|$ 就行了.

假如不存在 M_f 使(5.5.18)成立，那么存在一列 $x_m \in B$，使

$$\| f(x_m) \| > m \| x_m \|, \quad m = 1, 2, \cdots.$$

因此

$$\left\| f\left(\frac{x_m}{m \| x_m \|} \right) \right\| > 1, \quad m = 1, 2, \cdots. \tag{5.5.19}$$

可是

$$\lim_{m \to \infty} \left\| \frac{x_m}{m \| x_m \|} \right\| = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} = 0,$$

所以 $\lim\limits_{m \to \infty} \dfrac{x_m}{m \| x_m \|} = 0 \in B$. 另外一方面，

$$f(0) = f(x - x) = f(x) - f(x) = 0 \in \widetilde{B}. \tag{5.5.20}$$

(5.5.19)和(5.5.20)同时成立表示 f 在 $0 \in B$ 不连续，这是不对的. 所以(5.5.18)成立.

反过来，如果(5.5.18)成立，f 当然连续. (5.5.18)叫做 f 的有界性. 因此，对线性算子来说，有界和连续等价.

通常把使(5.5.18)成立的最小的 M_f 记作 $\| f \|$，当作 f 的范数来看. 于是把 B 映入 $\widetilde{B}$ 去的连续线性映射 f 的全体显然构成一个候补 Banach 空间. 特别当 $\widetilde{B}$ 是 $\boldsymbol{R}^1$ 的时候，这个候补 Banach 空间就称作 B 的**共轭空间** B^*，就是在 B 里定义的连续线性实泛函的全体.

现在假定 B 是一个可分的 Banach 空间，$\{x_m \mid m = 1, 2, \cdots\} \subseteq B$ 处处稠密. 令 $F \subseteq B^*$. 为了证明 F 可分，不妨假定 $\| f \|$ $(f \in F)$ 全体有界，因为 F 总可以看成可列个子集的和集，其中每个子集

有这样的有界性. 那么对每个 $f\in F$, $(f(x_1),\cdots,f(x_k))$ 可以看作 $\boldsymbol{R}^k$ 中一点, 因此, $\{(f(x_1),\cdots,f(x_k))\mid f\in F\}$ 是 $\boldsymbol{R}^k$ 的一个子集, 所以有可列的处处稠密的子集

$$\{(f_{kl}(x_1),\cdots,f_{kl}(x_k)\mid l=1,2,\cdots\}.$$

令 $\Delta_k=\{f_{kl}\mid l=1,2,\cdots\}$, 那么 $\Delta=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Delta_k$ 是 F 的一个可列子集, 而且对每个 $f\in F$, Δ 有一个子列 $\{f_m\}$, 使

$$|f_m(x_1)-f(x_1)|<\frac{1}{m},\cdots,|f_m(x_m)-f(x_m)|<\frac{1}{m},$$

其中 $m=1,2,\cdots$. 因此对任意一个 $x\in B$, 假定它是 $\{x_m\}$ 的子列 $\{x_{m_i}\}$ 的极限, 那么

$$\begin{aligned}|f_N(x)-f(x)|&\leqslant|f_N(x)-f_N(x_{m_i})|+|f_N(x_{m_i})-f(x_{m_i})|\\&\quad+|f(x_{m_i})-f(x)|\\&\leqslant A\,\|x-x_{m_i}\|+\frac{1}{N}+A\,\|x_{m_i}-x\|,\quad N>m_i.\end{aligned}$$

取 N 充分大的话, 可以取 m_i 大得足够使不等式右端小于任意一个预先给定的正数. 因此, $\lim\limits_{N\to\infty}f_N(x)=f(x)$. ▌

§5.6 边界的改造、分歧边界

前面我们已经在非常一般的边界函数的假设下讨论了 Dirichlet 问题, 不过解答并不唯一, 因为边界函数不一定干脆. 这样一来, 有许多非常简单的调和函数都不能看作 Dirichlet 问题的解, 或者说, 我们不能从前面的理论由边界行为来确定这些函数. 比方 $\arg z$ 的主值在单位圆内部除去 $(-1,0)$ 以外的部分里调和, 可是它在 $(-1,0)$ 中的每一点, 上极限和下极限的数值差 2π. 可以看到无论用 $\arg z$ 在这个区域的边界的上极限或者下极限当边界函数, 我们得到的解都不是 $\arg z$.

为了克服这种障碍, 改造一个区域或者一个开集的边界是一

种方法. 我们可以这样看，假定 Q 是 E^n 的开子集 Ω 的一个边界点，随便作 Q 的一列单调减小的邻域 $\{D_m\}$，要 $\bigcap_{m=1}^{\infty} D_m = \{Q\}$. 对一个 m，$D_m \cap \Omega$ 未必连通，它的成分也不一定以 Q 为边界点. 现在假定存在一个 $M>0$，使对所有的 $m>M$，$D_m \cap \Omega$ 有一个成分 ω^m 以 Q 为边界，并且 $\{\omega^m\}$ 构成一个单调减小列，那么说 $\{\omega^m\}$ 是一个到 Ω 在 Q 的一个**尽头** $\hat{Q}$ 的链. 如果 $\{\tilde{\omega}_m\}$ 是一列单调减小的区域，对每一个充分大的 m，存在一个 $\tilde{\omega}_n \supseteq \omega^m$ 和一个 $\tilde{\omega}_k \subseteq \omega^m$，那么说 $\{\tilde{\omega}_m\}$ 跟 $\{\omega^m\}$ 是等价的链.

我们看到，尽头的概念可以用一个等价的概念来代替. 假定 $\{\omega_m\}$ 是决定一个尽头 $\hat{Q}$ 的一个链，在每个 ω_m 里随便拿一点 P_m，当 m 不同时，要求 P_m 也不同. 那么每两点 P_m 和 P_{m+1} 可以用一条 ω_m 里的折线 l_m 连接，不同的 l_m 不相交. 令 $\gamma_m = \sum_{k=1}^{m} l_k + \overline{P_{m+1}Q}$，这里 $\overline{AB}$ 表示连接两点 A 和 B 的直线段，那么 γ_m 可以看作一条连接 P_1 和 Q 的曲线. $\sum_{k=1}^{m} l_k$ 是这条曲线上的一段从 P_1 到 P_{m+1} 的简单弧，包含在 Ω 里. γ_m 的方程假定是

$$P = f_m(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, m = 1, 2, \cdots,$$

其中 $f_m(t)$ 是把 $[0,1]$ 映入 E^n 去的连续映射. 显然可以选择 t_k，$1 \leqslant k \leqslant m+2$，$0 = t_1 < \cdots < t_{m+2} = 1$，使当 $m \to \infty$ 时 $t_{m+1} \to 1$，并且当 $m' > m$ 时，$f_{m'}|_{(0,t_{m+1})} = f_m|_{(0,t_{m+1})}$. 这样一来，当 $m \to \infty$ 时，$f_m(t)$ 一致收敛于一个连续映射 $f(t)$，$0 \leqslant t \leqslant 1$. 事实上，对任何一个正数 ε，只要取 m 充分大使 ω_m 的直径小于 $\varepsilon/2$，就得到当 $m' > m$ 的时候

$$r_{f_{m'}(t), f_m(t)} \leqslant \begin{cases} 0, & \text{当 } 0 \leqslant t \leqslant t_{m+1}, \\ r_{f_{m'}(t)Q} + r_{f_m(t)Q} < \varepsilon, & \text{当 } t_{m+1} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

这就证明了 $\{f_m(t)\}$ 的一致收敛. 这样一来就得到一条连接 P_1 和 Q 的简单曲线 $\gamma: P = f(t)$，$0 \leqslant t \leqslant 1$.

反过来，假定存在一条简单曲线 γ 把 Q 和一点 $P_1\in\Omega$ 连接起来，那么对 Q 的任何一列单调减小的邻域 $\{D_m\}$，如果 $\bigcap_{m=1}^{\infty} D_m = \{Q\}$ 的话，$D_m\cap\Omega$ 总有并且只有一个成分 ω^m 包含 $\gamma\setminus\{Q\}$ 的末了一段弧. 这样一列 $\{\omega^m\}$ 就决定了 Ω 在 Q 的一个尽头，并且对 Q 的邻域列的不同的选择，所决定的尽头是相同的.

这样，在 Q 的一个尽头可以用 (Q,γ) 这样的记号来表示. 当然，如果 γ' 是另一条连接 Q 和一点 $P_1'\in\Omega$ 的简单曲线，而 γ' 所决定的链跟 γ 的相同，那么 (Q,γ) 和 (Q,γ') 只表示同一个尽头.

由上面的说明知道，开集 Ω 在一个边界点 Q 有一个尽头的充分而且必要的条件是 Q 可达，也就是 Q 可以跟 Ω 的一个内点用一条简单曲线 γ 连接，$\gamma\setminus\{Q\}\subset\Omega$. 因此，在不可达的边界点是没有尽头的，而在一个可达的边界点，尽头却不一定只有一个. 比方 §5.4 所举的例子中的那个平面区域，$\overline{OA}$ 上每一点都是不可达的边界点，而在所画的垂直于实轴的各个直线段的每一点有两个尽头.

现在假定函数 u 在一个开集 Ω 里定义，Q 是 Ω 的一个边界点，$\{\omega_m\}$ 是在 Q 有尽头的一个链，这个尽头记作 $\hat{Q}$. 我们可以模拟 u 在 Q 的上下极限的定义，定义 u 在 $\hat{Q}$ 的上下极限如下：

$$\overline{\lim_{\Omega\ni P\to\hat{Q}}}\, u(P) = \lim_{m\to\infty}\ \sup_{P\in\omega_m} u(P),$$

$$\underline{\lim_{\Omega\ni P\to\hat{Q}}}\, u(P) = \lim_{m\to\infty}\ \inf_{P\in\omega_m} u(P).$$

特别，如果 u 在 Ω 里连续，那么 u 在尽头 $\hat{Q}$ 的聚值（就是属于 $\bigcap_{m=1}^{\infty}\overline{u(\omega_m)}$ 的实数）全体正好构成闭区间$[\underline{\lim}_{\Omega\ni P\to\hat{Q}}\, u(P),\ \overline{\lim}_{\Omega\ni P\to\hat{Q}}\, u(P)]$.

事实上，u 在 $\hat{Q}$ 的上下极限假定是 a 和 b，那么存在两个收敛于 Q 的点列 $\{P_m'\}$ 和 $\{P_m''\}$，$P_m'\in\omega_m$，$P_m''\in\omega_m$，使 $u(P_m')\to a$，$u(P_m'')\to b$. 由于 ω_m 连通，u 必须把 ω_m 映入一个连通的实数集合. 所以对任何一个实数 d，$0<d<1$，存在一点 $P_m'''\in\omega_m$，使 $u(P_m''')=$

$du(P'_m) + (1-d)u(P''_m)$. 令 $m \to \infty$，得到

$$u(P'''_m) \to da + (1-d)b.$$

$\{P'''_m\}$ 显然收敛于 Q，因此 $[a,b]$ 中任何一个数 $da+(1-d)b$ 是 u 在 $\hat{Q}$ 的一个聚值.

连续函数 u 在尽头 $\hat{Q}$ 的一个聚值当然也是在通常边界点 Q 的一个聚值. 可是由于上面的性质，我们用 $\hat{Q}$ 代替 Q 来考虑 u 的聚值是更合适的，因为一个尽头所对应的聚值正好是一个闭区间. 当然也可以设计比尽头更细致的元素，使聚值跟这种元素成一一对应，于是函数在每个这种元素都有唯一的极限值. 但是如果考虑的是过分广泛的函数类，这样做法不容易得到有意义的成果. 对于正的调和函数类，这种想法引起"Martin 边界"的研究，我们以后再介绍. 这里我们只把尽头当作新的代替边界点的概念. 由于在一个通常的可达的边界点，尽头不一定唯一，因此尽头分化了通常的可达边界点，所以我们把开集 Ω 的尽头的全体称作 Ω 的**分歧边界** $\hat{B}(\Omega)$. 我们给 Ω 及 Ω 的分歧边界的和集 $\hat{\Omega}$ 一个拓扑. Ω 里的点以它通常的邻域跟 Ω 的交集当邻域；而一个尽头 $\hat{Q}_0$ 的邻域规定如下：假定 ω 属于决定 $\hat{Q}_0$ 的一个滤子，那么 ω 跟那些 ω 和 Ω 的共同尽头的全体的和集称作 $\hat{Q}_0$ 的一个邻域. 根据这样的邻域概念得到开集. 最后，凡是包含一点 $P \in \hat{\Omega}$ 的这种开集都称作 P 的一个邻域.

注意：根据这样的拓扑所得到的一个函数在一个尽头的聚值及上下极限等概念跟前头所定义的一致.

为了在 $\hat{\Omega}$ 上建立关于 Dirichlet 问题的理论，首先要建立极大值原理，就是在 Ω 里有上界的下调和函数如果在分歧边界的每一点（每一个尽头）的上极限小于 M，那么就在 Ω 里处处小于 M. 我们知道，不是在每个边界点都有尽头，而且可达边界点也可以有 Ω 里的点列趋于它，可是函数沿这个点列的聚值也不能作为在某个尽头的聚值. 因此首先得证明用分歧边界代替通常边界时，所略去的边界点全体是零调和测度集. 现在先证明

引理 1 假定 Ω_1 和 Ω_2 是 E^n 的两个有界子区域，$\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \varnothing$，$e$ 是 Ω_1 的一个零调和测度的边界子集，e 有一个邻域 D 使 $D \cap B(\Omega_1) \subseteq B(\Omega_2) \cap B(\Omega_2 \cap \Omega_1)$，那么 e 是 Ω_2 的零调和测度的边界子集.

证明 把 Ω_i 的调和测度记作 $\eta_P^{(i)}$. 如果 $\Omega_2 \subseteq \Omega_1$，引理 1 的结论显然成立，因为当 $P \in \Omega_2$ 时，$\eta_P^{(2)}(e) \leqslant \eta_P^{(1)}(e)$.

因此只要证明 $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ 的情况就行了，因为不然的话可以用 $\Omega_1 \cap \Omega_2$ 代替 Ω_1.

首先，如果 $\sup\limits_{P \in \Omega_2} \bar{\eta}_P^{(2)}(e) = q < 1$，那么任何一个 $v \in \Phi_{q\chi_e}^{(2)}$ 必须满足 $v(P) \geqslant \bar{\eta}_P^{(2)}(e)$，这里 $\Phi_f^{(i)}$ 表示全体在 Ω_i 里恒等于 ∞ 或者有下界的上调和函数，并且在 $B(\Omega_i)$ 上的每一点的下极限不小于 f. 于是

$$q\bar{\eta}_P^{(2)}(e) = \inf_{v \in \Phi_{q\chi_e}^{(2)}} v(e) \geqslant \bar{\eta}_P^{(2)}(e).$$

因此必须 $\bar{\eta}_P^{(2)}(e) = 0$，引理 1 的结论成立.

现在由调和函数极大值原理，

$$\sup_{P \in B(\Omega_1) \cap C(D)} \eta_P^{(2)}(e) = r < 1.$$

因此比较一下 $\bar{\eta}_P^{(2)}(e)$ 和 $\bar{\eta}_P^{(1)}(e) + r\eta_P^{(1)}(B(\Omega_1) \cap C(D))$ 在 $B(\Omega_1)$ 上的上下极限知道

$$\bar{\eta}_P^{(2)}(e) \leqslant \bar{\eta}_P^{(1)}(e) + r\eta_P^{(1)}(B(\Omega_1) \cap C(D)) \leqslant r < 1, \quad P \in \Omega_1.$$

又由 $\bar{\eta}_P^{(2)}(e)$ 在 $\Omega_2 \backslash \Omega_1$ 的边界点的上极限知道

$$\bar{\eta}_P^{(2)}(e) \leqslant r, \quad P \in \Omega_2 \backslash \Omega_1.$$

因此，$\bar{\eta}_P^{(2)}(e) \leqslant r < 1, P \in \Omega_2$. 于是由前一段证明知道引理 1 成立. ▌

引理 2(de la Vallée Poussin) E^n 的一个有界子区域 Ω 的不可达边界点全体是零调和测度集.

证明 只要证明 $B(\Omega)$ 的任何一个调和测度大于 0 的闭子集 e 一定包含可达边界点就行了.

假定 e 是 $B(\Omega)$ 的闭子集而 $\eta_P(e)>0$，$P\in\Omega$. 作一个网格系统①，这系统对 e 的第 k 次覆盖记作 σ_k. 组成 σ_k 的各个网格跟 Ω 的交集的成分记作 $\omega_{k1},\omega_{k2},\cdots$，假定这些 ω_{kj} 都不空. 假定 $P\notin\sigma_1$，η_P 是用 P 作极扫除出来的的分布. 这扫除可以逐步地来. 先扫清 $\Omega\backslash\sigma_1$，然后再把扫到 $B(\sigma_1)\cap\Omega$ 上去的质量扫到 $B(\Omega)$ 上去. 后面一步扫除又可以逐步地来，先扫清 $(\Omega\backslash\sigma_1)\cup\omega_{11}$ 内部，然后逐步扫清 $(\Omega\backslash\sigma_1)\cup\omega_{11}\cup\omega_{12}$，$(\Omega\backslash\sigma_1)\cup\omega_{11}\cup\omega_{12}\cup\omega_{13},\cdots$ 的内部. 因此必定存在最小的正整数 r，扫清了 $(\Omega\backslash\sigma_1)\cup\omega_{11}\cup\cdots\cup\omega_{1r}$ 内部的时候 e 就得到质量了. 把 ω_{1r} 记作 ω^1，那么由引理 1，如果先扫 $(\Omega\backslash\sigma_1)\cup\omega^1$ 内部，e 也会得到质量，所以 $e\cap B(\omega^1)\neq\varnothing$.

$(\Omega\backslash\sigma_1)\cup\omega^1$ 内部的扫除又可以逐步地来. 假定包含在 ω^1 里的那些 ω_{2j} 是 $\omega_{21},\omega_{22},\cdots$(如果不是，号码改编一下好了)，那么 $(\Omega\backslash\sigma_1)\cup\omega^1$ 内部的清扫工作可以逐步通过 $(((\Omega\backslash\sigma_1)\cup\omega^1)\backslash(\omega^1\cap\sigma_2))\cup\omega_{21}$，$(((\Omega\backslash\sigma_1)\cup\omega^1)\backslash(\omega^1\cap\sigma_2))\cup\omega_{21}\cup\omega_{22},\cdots$ 这一列集合内部的扫除而完成. 同样，一定存在最先使 e 得到质量的一次扫除. 假定这一次是 $(((\Omega\backslash\sigma_1)\cup\omega^1)\backslash(\omega^1\cap\sigma_2))\cup\omega_{21}\cup\cdots\cup\omega_{2r}$ 内部的扫除，那么把 ω_{2r} 记作 ω^2. 同样道理可以证明 $e\cap B(\omega^2)\neq\varnothing$. 这样继续不断下去，得到一列 $\{\omega^n\}$ 满足 $e\cap B(\omega^n)\neq\varnothing$ 而 $\omega^n\subset\omega^{n-1}$. $\{e\cap B(\omega^n)\}$ 是一列单调减小的不空的闭集，所以由 Cantor 定理，$\bigcap_{n=1}^{\infty}(e\cap B(\omega^n))\neq\varnothing$. 因此存在一点 $Q\in\bigcap_{n=1}^{\infty}(e\cap B(\omega^n))$.

在每个 ω^n 中取一点 P_n. 每个直线段 $P_nP_{n+1}\subseteq\omega^n$，于是当 $n\to\infty$ 时，折线 $P_1P_2\cdots P_nQ$ 的极限是一条从 Ω 的内部通向 Q 的曲线

---

① 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中，做与坐标超平面 $x_i=0(i=1,2,\cdots,n)$ 平行的 n 族超平面得到 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个划分. 由邻接的超平面 $x_i=a_i$ 和 $x_i=b_i$，$a_i<b_i$. 决定一个细胞 $a_i<x_i<b_i(i=1,2,\cdots,n)$. 这些细胞叫做这个划分的网格. 再做可列无限多次划分如下：(1) 每一次用来划分的超平面在后一次划分中仍旧采用；(2) 各次划分所得的网格边长的上界随划分次数的增加而趋于 0. 那么这无限多次划分出来的网格全体构成一个网格系统. 由第 m 次网格划分可得到第 m 次覆盖.

l,并且 $l\setminus\{Q\}\subset\Omega$. 所以 Q 是属于 e 的一个可达的边界点. ▍

定理 5.6.1(分歧边界下的极大值原理) 假定 E^n 的有界开子集 Ω 里的一个有上界的下调和函数 u,它在 Ω 的每个尽头的上极限不超过常数 M,至多除了在边界的一个零内容子集里的点的那些尽头以外,那么当 $P\in\Omega$ 时,$u(P)\leqslant M$.

证明 随便取一点 $P\in\Omega$. 由假设,对任何一个正数 ϵ,Ω 的每个尽头在 Ω 里有一个邻域,在其中 $u\leqslant M+\epsilon$. 这些邻域可以取得小到不包含 P. Ω 减掉 Ω 同这些邻域的交集以后成了一个有界开集 Ω_1,而 $B(\Omega_1)\cap B(\Omega)$ 除一个零内容集外必须由 Ω_1 的不可达边界点(但不一定是 Ω 的不可达边界点)组成. 因此由引理 2,对 Ω_1 里的点来说,$B(\Omega_1)\cap B(\Omega)$ 的调和内测度是 0. 此外,对 $Q\in B(\Omega_1)\cap\Omega$,$u(Q)\leqslant M+\epsilon$. 因此由 § 4.3 的极大值原理得到 $u(P)\leqslant M+\epsilon$. 令 $\epsilon\to 0$ 即得结论. ▍

由定理 5.6.1 可以建立关于 $\hat{\Omega}$ 的调和函数的唯一性定理和一致收敛的定理. 为了建立分歧边界上的调和测度的概念,先证明一个一般的事实.

引理 3 假定 $\{\Omega_m\}$ 是 E^n 的开子集 Ω 的一列单调增加的开子集,$\bigcup_{m=1}^{\infty}\Omega_m=\Omega$,那么对任何一点 $P\in\Omega$,当 $m\to\infty$ 的时候,Ω_m 的调和测度 $\eta_P^{(m)}$ 强收敛于 Ω 的调和测度 η_P. 这里当 $n=2$ 时,假定 Ω 有界;$n>2$ 时,Ω 可以无界,而 η_P 表示把 ϵ_P 扫到 $C(\Omega)$ 上去所得到的分布.

证明 因为

$$\|\eta_P^{(m)}-\eta_P^{(n)}\|^2=\|\eta_P^{(m)}\|^2-2(\eta_P^{(m)},\eta_P^{(n)})+\|\eta_P^{(n)}\|^2,$$

所以当 $n>m$ 时,根据 $U^{\eta_P^{(m)}}$,$U^{\eta_P^{(n)}}$ 和 U^{ϵ_P} 的关系得到

$$\|\eta_P^{(m)}-\eta_P^{(n)}\|^2=U^{\eta_P^{(m)}}(P)-U^{\eta_P^{(n)}}(P).$$

现在 $\{U^{\eta_P^{(m)}}\}$ 是一列单调减小的调和函数,并且都不比 U^{η_P} 小,所以收敛. 因此上面等式的右边趋于 0. 因此,$\{\eta_P^{(m)}\}$ 强收敛于一个测度

μ. 可以证明 $\mu = \eta_P$.

事实上，$\{\eta_P^{(m)}\}$既然强收敛于 μ，当然浑收敛于 μ. 因此，μ 分布在 $B(\Omega)$上，μ 的能量当然有限. 此外

$$U^{\mu}(Q) \leqslant \varliminf_{m\to\infty} U^{\eta_P^{(m)}}(Q) \leqslant U^{\varepsilon_P}(Q)$$

处处成立.

另外一方面，$\{\eta_P^{(m)}\}$又弱收敛于 μ，所以

$$U^{\mu}(Q) = \lim_{m\to\infty} U^{\eta_P^{(m)}}(Q)$$

又必须似乎处处成立. 特别当 $Q\in C(\Omega)$时，等式的右边就是

$$\lim_{m\to\infty} U^{\varepsilon_P}(Q) = U^{\varepsilon_P}(Q).$$

因此

$$U^{\mu}(Q) = U^{\varepsilon_P}(Q), \quad Q \in C(\Omega)$$

似乎处处成立. 所以 $\mu=\eta_P$. ▌

从上面的证明过程还知道，所说的这列单调增加的开子集$\{\Omega_m\}$是可以任意选择的.

现在，相对于 $\hat{B}(\Omega)$ 的任何一个开集 e 可以表示为 $V \cap \hat{B}(\Omega)$，这里V是包含e的相对于$\hat{\Omega}$ 的开集. 假定$\{\Omega_m\}$是Ω的一列单调增加的开子集，$\bigcup_m \Omega_m = \Omega$，那么对任何一点 $P \in \Omega$，由于$\{\eta_P^{(m)}\}$ 浑收敛，$\{\eta_P^{(m)}(V)\}$ 收敛于一个数，记作$\hat{\eta}_P(V)$. 此外又对任意的$S \subseteq \hat{B}(\Omega)$，定义

$$\hat{\eta}_P(S) = \inf_{e\supseteq S} \hat{\eta}_P(e).$$

这样就得到定义在 $\hat{B}(\Omega)$ 的集合函数$\hat{\eta}_P$，称作分布在$\hat{B}(\Omega)$ 上的**分歧调和测度**. 由于$\hat{B}(\Omega)$ 不一定局部紧致，这个测度不一定是一个 Radon 测度[①]. 但是我们仍旧可以用相对于$\hat{B}(\Omega)$ 的开集闭集的概

---

① Radon 只定义 E^n 上的测度. 现在大家把定义在局部紧致的 Hausdorff 空间上的类似概念也叫做 Radon 测度.

念来定义相对于$\hat{B}(\Omega)$的(B)集，并且定义上、下积分$\overline{\int} f \mathrm{d}\hat{\eta}_P$和$\underline{\int} f \mathrm{d}\hat{\eta}_P$. 于是完全可以同样建立关于 Dirichlet 问题的理论.

令$\overline{H}_f(P) = \overline{\int} f \mathrm{d}\hat{\eta}_P$, $\underline{H}_f(P) = \underline{\int} f \mathrm{d}\hat{\eta}_P$. 用$\hat{\Phi}_f$表示在$\Omega$里恒等于$+\infty$或者在$\hat{B}(\Omega)$每一点下极限小于$f$的有下界的上调和的函数全体. 又$v \in \hat{\Psi}_f$就是$-v \in \hat{\Phi}_{-f}$的意思.

定理 5.6.2 假定f是一个定义在$\boldsymbol{E}^n$的有界开子集Ω的分歧边界上的函数，那么下面的事实成立：

(1) $\overline{H}_f(P)$及$\underline{H}_f(P)$对$P \in \Omega$调和；

(2) $\overline{H}_f(P) = \inf\limits_{v \in \hat{\Phi}_f} v(P)$, $\underline{H}_f(P) = \sup\limits_{v \in \hat{\Psi}_f} v(P)$.

关于正则和不正则边界点附近的上、下解的行为自然也可以推广到正则和不正则的尽头上来，不再详细谈.

§5.7 Martin 边界

定理 5.7.1 假定Ω是$\boldsymbol{E}^n$的一个 Green 子区域(有 Green 函数的区域)，那么Ω有紧致化$\hat{\Omega}$如下：

(1) 假定$Q_0 \in \Omega$，当$P \in \Omega, Q \in \Omega$，我们令$K(P,Q) = G(P,Q)/G(P,Q_0)$，那么对每一点$S \in \Delta = \hat{\Omega} \setminus \Omega$,

$$\lim_{\Omega \ni P \to S} \frac{G(P,Q)}{G(P,Q_0)} = \lim_{\Omega \ni P \to S} K(P,Q)$$

存在，记作$K(S,Q)$. 对固定的Q_0和S, $K(S,Q)$关于$Q \in \Omega$调和；

(2) 当Q_0固定时，$S \in \Delta$跟调和函数$K_S(Q) = K(S,Q)$之间成一一对应；

(3) $\hat{\Omega}$可有尺度并且除了一个拓扑变换外唯一决定，跟Q_0的选择无关.

证明 取 $Q_0\in\Omega$. 作 Q_0 的两个邻域 V 及 W 满足 $V\subseteq\overline{V}\subseteq W\subseteq\overline{W}\subseteq\Omega$, $\overline{W}$ 紧致. 然后在 $(\Omega\backslash W)\times(\Omega\backslash W)$ 里定义尺度

$$d(P_1,P_2)=\sup_{Q\in V}|K(P_1,Q)-K(P_2,Q)|.$$

d 是尺度是容易看到的. 因为假设 $d(P_1,P_2)=0$, 那么

$$K(P_1,Q)-K(P_2,Q)=0,\quad Q\in V.$$

由 $K(P_1,Q)$ 及 $K(P_2,Q)$ 的调和性, 当 $Q\in\Omega$ 时必须有 $K(P_1,Q)=K(P_2,Q)$. 但是 $K(P_1,Q)$ 及 $K(P_2,Q)$ 分别在 P_1 及 P_2 有奇异性, 所以 $P_1=P_2$.

这个尺度在 $\Omega\backslash W$ 上产生的拓扑跟原来的欧氏拓扑一致, 因此可以延拓到整个 Ω 上去, 于是 Ω 是一个尺度空间. 把 Ω 关于这个尺度的完备化记作 $\hat{\Omega}$, 那么当 $\Omega\ni P\to S\in\hat{\Omega}\backslash\Omega$ 时, $K(P,Q)$ 在 V 上收敛于一个函数, 记作 $K(S,Q)$. 因此, $K(P,Q)$ 在 Ω 里收敛于一个调和函数 $K(S,Q)$. $\hat{\Omega}$ 是紧致的并且符合我们的要求.

$\hat{\Omega}$ 的唯一性是容易看到的. 因为要是有另一个这样的紧致化 $\hat{\Omega}'$, 那么可以取到一个点列 $\{P_m\}\subseteq\Omega$, $P_m\to S\in\hat{\Omega}\backslash\Omega$, 可是 $\{P_m\}$ 有两个子列分别收敛于 $\hat{\Omega}'\backslash\Omega$ 上不同的 S_1' 及 S_2', 由于

$$\lim_{m\to\infty}K(P_m,Q)=K(S,Q),$$

根据紧致化的要求这极限不能同时对应于不同的 S_1' 及 S_2', 这样就矛盾了. ▌

定理 5.7.1 中的 $\Delta=\hat{\Omega}\backslash\Omega$ 称作 Ω 的 **Martin 边界**, $\hat{\Omega}$ 称作 Ω 的 **Martin 紧致化**.

Martin 边界是为了把 Poisson 积分表示法推广到一般的正调和函数的情形上去而设计的.

假定 u 在一个 Green 区域 Ω 里调和并且为正. 作一列单调增加的子域 $W_m\subseteq\overline{W}_m\subseteq\Omega$, $\overline{W}_m$ 紧致, $\overline{W}_m$ 在 $B(W_m)$ 上点点不瘦. 在 $\Omega\backslash\overline{W}_m$ 里造一个有界的调和函数 v_m, 在 $B(W_m)$ 上其边界值为 u, 在 $B(\Omega)$ 上边界值为 0. 再令

$$u_m(P)=\begin{cases}u(P), & P\in W_m,\\ v_m(P), & P\in \Omega\backslash W_m,\end{cases}$$

那么 u_m 在 Ω 里连续并且上调和，并且在 $B(\Omega)$ 上似乎处处等于 0. 因此必须是一个 Green 位势，从而可以表示成

$$\begin{aligned}u_m(Q)&=\int G(P,Q)\mathrm{d}\mu_m(e_P)\\&=\int K(P,Q)G(P,Q_0)\mathrm{d}\mu_m(e_P)\\&=\int K(P,Q)\mathrm{d}\gamma_m(e_P),\end{aligned}$$

这里 μ_m 和 γ_m 都是分布在 $B(W_m)$ 上的正测度，而 γ_m 的总质量是 $u_m(Q_0)$，因为

$$\int \mathrm{d}\gamma_m=\int G(P,Q_0)\mathrm{d}\mu_m(e_P)=u_m(Q_0).$$

由于 $\hat{\Omega}$ 是一个紧致的尺度空间，当 $m\to\infty$ 时，γ_m 浑收敛于 Δ 上的一个测度 γ. 现在 $K(P,Q)$ 在 $\hat{\Omega}$ 里连续，所以得到

$$\begin{aligned}u(Q)&=\lim_{m\to\infty}u_m(Q)=\lim_{m\to\infty}\int K(P,Q)\mathrm{d}\gamma_m(e_P)\\&=\int K(P,Q)\mathrm{d}\gamma(e_P).\end{aligned}\tag{5.7.1}$$

(5.7.1)是 Poisson-Stieltjes 积分的推广. 事实上，当 $B(\Omega)$ 充分光滑的时候，

$$K(P,Q)=\lim_{\Omega\ni P'\to P}\frac{G(P',Q)}{G(P',Q_0)}=\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P}\Big/\frac{\partial G(P,Q_0)}{\partial n_P},$$

这里 $\boldsymbol{n}_P$ 表示 $B(\Omega)$ 在 P 点的法线方向. 这是因为当 $P\in B(\Omega)$ 时 $G(P,Q)=0$，而 $G(P,Q)$ 沿从 P 出发的任何一个方向 $\boldsymbol{l}$ 的导数当 $\boldsymbol{l}$ 是法线方向时达到极大，就等于 $|\nabla G(P,Q)|$. 于是

$$\frac{\partial G(P,Q)}{\partial l}=\nabla_P G(P,Q)\cdot\boldsymbol{l}=\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P}\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n}_P).$$

因此，(5.7.1)在这种特殊情况下就是

$$u(Q) = \int K(P,Q)\mathrm{d}\gamma(e_P) = \int \frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P}\mathrm{d}\mu(e_P),$$

$$\mu(e_Q) = \int_{e_Q} \frac{1}{\dfrac{\partial G(P,Q_0)}{\partial n_P}}\mathrm{d}\gamma(e_P).$$

$\dfrac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P}$ 正好就是通常的 Poisson 核(差一个常数因子). 因此, Martin 的积分表示法(5.7.1)从另一角度出发推广了 Poisson 积分.

但是 Martin 注意到对一个固定点 Q_0 和一个正调和函数 u, (5.7.1)里的测度 γ 并不唯一决定. 为了求得一个合理的限制使这测度唯一, Martin 开创了极小调和函数的概念.

一个在 Green 区域 Ω 里调和并且非负的函数如果不能优胜于任何其他的正调和函数, 除了它自己的常数倍以外, 那么就称作**极小调和函数**.

把 Ω 里所有的调和函数全体记作 $\mathscr{H}$, 那么在通常函数的线性组合的意义下 $\mathscr{H}$ 是一个线性空间. 对一个固定点 $Q_0\in\Omega$, $\mathscr{H}$ 里满足 $u(Q_0)=0$ 的元素 u 的全体构成一个"超平面"$\mathscr{P}$. $\mathscr{H}$ 里满足 $u(Q_0)=1$ 的元素全体是一个不通过 $\mathscr{H}$ 的原点(恒等于 0 的函数)的"超平面"$\mathscr{P}_1$. 属于 $\mathscr{H}$ 的非负的调和函数全体记作 $\mathscr{H}^+$, 那么 $\mathscr{H}^+$ 是一个凸锥, 因为对任何 $u\in\mathscr{H}^+$, $v\in\mathscr{H}^+$ 以及任何实数 a, $0\leqslant a\leqslant 1$,

$$au + (1-a)v \in \mathscr{H}^+.$$

假定 $w\in\mathscr{H}^+$, w 不是任何两个 $v_1\in\mathscr{H}^+$ 及 $v_2\in\mathscr{H}^+$ 的正的常系数线性组合, 除了 v_1 和 v_2 都是 w 的常数倍以外, 那么说 w 是 $\mathscr{H}^+$ 的一个**极端元素**. 用几何学的说法, 就是 w 落在 $\mathscr{H}^+$ 锥面的母线上且通过这根母线可做一个超平面与 $\mathscr{H}^+$ 只在这根母线相交.

引理 1 假定 Ω 是 E^n 的 Green 子区域, $w\in\mathscr{H}^+$, 那么 w 是 $\mathscr{H}^+$ 的极端元素的充分而且必要的条件是除了 w 的常数倍以外,

任何 $u\in\mathscr{H}^+$ 不能使 $u\leqslant w$ 在 Ω 里处处成立.

证明 如果存在 $u\in\mathscr{H}^+$ 使 $u\leqslant w$ 而 u 不是 w 的常数倍,那么 $w-u\in\mathscr{H}^+$ 并且 $w=(w-u)+u$,因此 w 不是极端元素. 所以条件是必要的. 反过来假定条件成立,这时候如果 $u\in\mathscr{H}^+$,$v\in\mathscr{H}^+$ 能使 $w=au+bv$ 成立,这里 a 及 b 是两个正常数,那么 $au\leqslant w$,$bv\leqslant w$,因此 au 及 bv 都必须是 w 的常数倍. 因此,u 及 v 也都是 w 的常数倍,所以 w 是极端元素. ∎

由于引理 1,Martin 把 $\mathscr{H}^+$ 的极端元素称为**极小调和函数**.

把 $\mathscr{H}^+$ 跟 $\mathscr{P}_1$ 的交集记为 $\mathscr{B}$ (见图 4),也就是把在 Q_0 的数值等于 1,在 Ω 里为正的调和函数全体记为 $\mathscr{B}$.

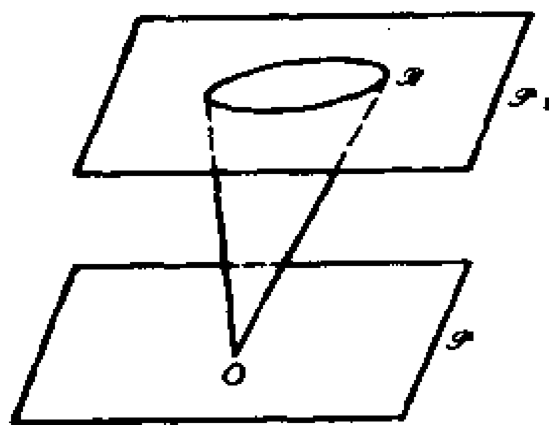


图 4

引理 2 假定 $u\in\mathscr{B}$ 是一个极小函数,那么存在一个唯一的 $S\in\Delta$ 使 $u(Q)=K(S,Q)$,$Q\in\Omega$.

证明 首先,存在一个分布在 Δ 上的测度 μ 使

$$u(Q)=\int K(P,Q)\mathrm{d}\mu(e_P).$$

在 μ 的支柱里随便取一点 S,作 S 的邻域 V,那么

$$u(Q)=\int_V K(P,Q)\mathrm{d}\mu(e_P)+\int_{\hat{\Omega}\setminus V}K(P,Q)\mathrm{d}\mu(e_P).$$

u 是极小的,而等号右边的两个积分都是正调和函数,所以必须都跟 $u(Q)$ 成比例. 因此存在一个测度 λ,λ 的支柱包含在 V 里使

$$u(Q)=\int K(P,Q)\mathrm{d}\lambda(e_P).$$

可是 V 是 S 的任意邻域,因此必须存在一个测度 λ,支柱是 $\{S\}$,使上面等式成立. 显然 λ 必须是 ε_S 的常数倍,因此

$$u(Q)=K(S,Q),$$

因为 $u(Q_0)=1=K(S,Q_0)$.

S 只能是唯一的，因为如果 S_1 也使 $u(Q)=K(S_1,Q)$ 成立，那么 $K(S,Q)=K(S_1,Q)$ 必须成立. 所以由 Martin 边界 Δ 的定义知道 $S=S_1$. ▍

我们把 Δ 上那些使 $K_S(Q)=K(S,Q)$ 为极小调和函数的点 S 称作**极小点**. 极小点全体记作 Δ_1，又令 $\Delta_0=\Delta\backslash\Delta_1$. 现在来研究 $S\in\Delta$ 是极小的充分且必要的条件.

前面说过，假定 $\{W_m\}$ 是 Ω 的一列单调增加且收敛于 Ω 的 Green 子域，$W_m\subseteq\overline{W}_m\subseteq\Omega$，$\overline{W}_m$ 紧致，$\overline{W}_m$ 在 $B(W_m)$ 上处处不瘦，那么任何一个在 Ω 里为正并且调和的函数 u 对每个 m 决定了一个测度 γ_m，γ_m 分布在 $B(W_m)$ 上，而

$$u(Q)=\int K(P,Q)\mathrm{d}\gamma_m(e_P),\quad Q\in W_m$$

成立. 特别当 $u(Q)=K_S(Q)=K(S,Q)$，$S\in\Delta$ 时，我们把 γ_m 记作 δ_{S,W_m}.

引理 3 $S\in\Delta$ 是极小的充分且必要的条件是当 $m\to\infty$ 时，δ_{S,W_m} 浑收敛于 ε_S.

证明 *充分性* 假定条件成立，又假定两个函数 $u\in\mathscr{H}^+$，$v\in\mathscr{H}^+$，使 $K_S(Q)=u(Q)+v(Q)$. 假定 u 及 v 在 $B(W_m)$ 上决定的测度是 γ_m 及 γ'_m，那么

$$\delta_{S,W_m}=\gamma_m+\gamma'_m.$$

当 $m\to\infty$ 时，γ_m 及 γ'_m 分别浑收敛（至少有子列浑收敛）于 Δ 上的正测度 γ 及 γ'. 现在 δ_{S,W_m} 浑收敛于 ε_S，所以，$\varepsilon_S=\gamma+\gamma'$. 这表示对任何 (B) 集 $E\subseteq\Delta$，

$$\gamma(E)+\gamma'(E)=\begin{cases}1, & \text{当 } S\in E,\\ 0, & \text{当 } S\notin E.\end{cases}$$

因此，γ 和 γ' 的支柱都必须是 $\{S\}$，γ 和 γ' 都是 ε_S 的常数倍，由此得 u 和 v 都是 K_S 的常数倍，所以 K_S 极小，从而有 S 极小.

必要性 如果 $S\in\Delta$ 极小，那么 $K_S(Q)$ 极小. 如果 δ_{S,W_m} 有子列浑收敛于 Δ 上一个正测度 γ，那么由引理 2，γ 的支柱只能是

$\{S\}$. 因为如果 γ 的支柱包含一点 $S'\neq S$ 的话，必须 $K_S(Q)=K_{S'}(Q)$，而这跟 Martin 边界的定义是矛盾的. ▌

引理 4 假定 Ω 是 E^n 的一个 Green 子区域，W 是 Ω 的子区域，$Q_0\in W$，$\overline{W}$ 紧致，$\overline{W}$ 在 $B(W)$上处处不瘦，f 在 $\hat{\Omega}$ 连续，那么 $\int f\mathrm{d}\delta_{S,W}$ 关于 $S\in\Delta$ 连续.

证明 随便取一点 $S_0\in\Delta$，对任何一个正数 ε，S_0 有一个邻域 U，使 $|K(S,Q)-K(S_0,Q)|<\varepsilon$ 对 $Q\in B(W)$ 一致地成立.

假定 $f\in\mathscr{D}(\Omega\backslash\{Q_0\})$，其中 $\mathscr{D}(\Omega\backslash\{Q_0\})$表示所有支柱是 $\Omega\backslash\{Q_0\}$的紧子集的无限次可微的函数全体，那么存在一个支柱紧致的测度 λ，使 $f(Q)=\int K(P,Q)\mathrm{d}\lambda(e_P)$. 因此，由 Fubini 定理

$$\begin{aligned}
&\left|\int f\mathrm{d}\delta_{S,W}-\int f\mathrm{d}\delta_{S_0,W}\right|\\
&=\left|\iint K(P,Q)\mathrm{d}(\delta_{S,W}(e_Q)-\delta_{S_0,W}(e_Q))\mathrm{d}\lambda(e_P)\right|\\
&=\left|\iint\frac{G(Q,Q_0)}{G(P,Q_0)}K(Q,P)\mathrm{d}(\delta_{S,W}(e_Q)-\delta_{S_0,W}(e_Q))\mathrm{d}\lambda(e_P)\right|\\
&\leqslant\sup_{\substack{Q\in B(W)\\ P\in\lambda\text{的支柱}}}\frac{G(Q,Q_0)}{G(P,Q_0)}\varepsilon|\lambda|(\Omega).
\end{aligned}$$

由于任何在 $\hat{\Omega}$ 里连续的函数 f 在 $B(W)$ 上可以被一列属于 $\mathscr{D}(\Omega\backslash\overline{V})$ 的函数所一致地逼近，这里 V 是 Q_0 的任意一个邻域，$\overline{V}\subseteq W$，我们看到$\int f\mathrm{d}\delta_{S,W}$ 在 S_0 连续. ▌

引理 5 Δ_0 是 F_σ 集，Δ_1 是 G_δ 集.

证明 在$\hat{\Omega}$ 里连续的函数全体记作 $\mathscr{K}(\hat{\Omega})$. 在一致收敛拓扑下，$\mathscr{K}(\hat{\Omega})$是一个有可列基的实线性空间. 因此可取可列个属于 $\mathscr{K}(\hat{\Omega})$的函数，它们全体 $\mathscr{K}_1$ 在 $\mathscr{K}(\hat{\Omega})$里处处稠密.

取一列单调增加子区域 W_m 收敛于 Ω，$\overline{W}_m$ 紧致并且 $\overline{W}_m$ 在 $B(W_m)$处处不瘦. 由引理 3 知道一点 $S\in\Delta$ 极小的充分而且必要的条件是$\{\delta_{S,W_m}\}$有一个子列浑收敛于 ε_S，因此

$$\Delta_1 = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcap_{f \in \mathscr{K}_1} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{l=m}^{\infty} \left\{ S \mid S \in \Delta, \text{并且} \left| \int f \mathrm{d}(\delta_{S,W_l} - \varepsilon_S) \right| < \frac{1}{j} \right\},$$

$$\Delta_0 = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{f \in \mathscr{K}_1} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{l=m}^{\infty} \left\{ S \mid S \in \Delta, \text{并且} \left| \int f \mathrm{d}(\delta_{S,W_l} - \varepsilon_S) \right| \geqslant \frac{1}{j} \right\}.$$

由于 $\int f \mathrm{d}(\delta_{S,W_l} - \varepsilon_S)$ 在 Δ 上连续，

$$\left\{ S \mid S \in \Delta, \text{并且} \left| \int f \mathrm{d}(\delta_{S,W_l} - \varepsilon_S) \right| \geqslant \frac{1}{j} \right\}$$

是闭集. 因此，Δ_0 是 F_σ 集，Δ_1 是 G_δ 集. ▌

引理 6（Stone 逼近原理） 假定 X 是一个紧致的拓扑空间，$\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{K}(X)$ 的线性子空间，当 $g_i \in \mathscr{M}(i=1,2)$ 的时候，$\min\{g_1, g_2\} \in \mathscr{M}$，又对任何 X 里不同的两点 P_1 及 P_2，存在 $f_1 \in \mathscr{M}$ 及 $f_2 \in \mathscr{M}$ 使

$$f_1(P_1)f_2(P_2) - f_1(P_2)f_2(P_1) \neq 0, \tag{5.7.2}$$

那么，$\overline{\mathscr{M}} = \mathscr{K}(X)$，这里 $\mathscr{K}(X)$ 理解为一致收敛拓扑下的拓扑空间.

证明 由假定知道对 X 里任何不同的两点 P_1 和 P_2，任何两个不同的实数 a_1 和 a_2，存在一个函数 $f \in \mathscr{M}$ 使 $f(P_i) = a_i (i=1, 2)$.

假定 $f \in \mathscr{K}(X)$，$\varepsilon > 0$. 对两个不同的点 P 和 Q，取一个函数 $f_{PQ} \in \mathscr{M}$，使

$$f_{PQ}(P) = f(P), \quad f_{PQ}(Q) = f(Q).$$

令

$$G_{PQ} = \{P' \mid P' \in X, \text{并且} f_{PQ}(P') < f(P') + \varepsilon\},$$

那么对每个固定的 $P \in X$，$\{G_{PQ}\}$ 是 X 的一个开覆盖族，因此包含一个有限子覆盖族 $\{G_{PQ_i}\}$. 令 $f_P = \min_i f_{PQ_i}$，那么 $f_P \in \mathscr{M}$，而且

$$f_P < f + \varepsilon, \quad f_P(P) = f(P).$$

令

$$G_P = \{Q \mid Q \in X, \text{并且} f_P(Q) > f(Q) - \varepsilon\},$$

那么 $\{G_P\}(P \in X)$ 是 X 的一个开覆盖族，因此包含一个有限子覆盖族 $\{G_{P_i}\}$. 令 $f_0 = \max_i f_{P_i} = -\min_i(-f_{P_i})$，那么 $f_0 \in \mathscr{M}$，而且 $|f_0 - f| < \varepsilon$. ▌

Stone 定理是 Weierstrass 多项式逼近定理的著名的推广. 满足引理 6 里的假设的 $\mathscr{M}$(除了(5.7.2)以外)通常称作在极大极小意义下构成一个**四角格局**或者**格子**(lattice).

定理 5.7.2 假定 Ω 是 E^n 的一个 Green 子区域，γ 是分布在 Ω 的 Martin 边界上的一个正测度，那么存在一个唯一的分布在 Δ_1 上的正测度 $\bar{\gamma}$ 使

$$\int K(P,Q)\,\mathrm{d}\bar{\gamma}(e_P) = \int K(P,Q)\mathrm{d}\gamma(e_P), \quad Q \in \hat{\Omega}.$$

证明 取一列子区域 W_m 单调增加地收敛于 Ω，$\overline{W}_m$ 紧致，$Q_0 \in W_m$ 并且 $\overline{W}_m$ 在 $B(W_m)$不瘦. 把下列正调和函数

$$q^\gamma(Q) = \int K(P,Q)\mathrm{d}\gamma(e_P)$$

在 $B(W_m)$上决定的测度记作 γ_m. 不妨假定 γ_m(至少有一个子列)浑收敛于一个分布在 Δ 上的正测度 $\bar{\gamma}$. 当然

$$q^{\bar{\gamma}}(Q) = q^\gamma(Q), \quad Q \in \hat{\Omega}.$$

因此只要证明$\bar{\gamma}(\Delta_0)=0$ 就行了.

我们先证明：如果 $f \in \mathscr{K}(\hat{\Omega})$，那么当 $m \to \infty$ 时，$\int f \mathrm{d}\delta_{S,W_m}$ 按测度$\bar{\gamma}$ 收敛于 $f(S)$，$S \in \Delta$. 也就是说，对任何正数 ε，

$$\lim_{m\to\infty} \bar{\gamma}\left(\left\{S \,|\, S \in \Delta \text{ 并且} \left|\int f\mathrm{d}(\delta_{S,W_m} - \varepsilon_S)\right| \geqslant \varepsilon\right\}\right) = 0. \tag{5.7.3}$$

把属于 $\mathscr{K}(\hat{\Omega})$并且满足(5.7.3)的函数全体记作 $\mathscr{M}$，那么 $\mathscr{M}$ 是一个线性空间，并且如果 $f_1 \in \mathscr{M}$，$f_2 \in \mathscr{M}$，则 $f = \min\{f_1, f_2\} \in \mathscr{M}$. 事实上，因为当 $m \to \infty$ 时，$\int f_i\,\mathrm{d}\delta_{S,W_m}$ 按测度$\bar{\gamma}$ 收敛于 $f_i(S)(i = 1,2)$，所以$\min\limits_{i=1,2}\int f_i\,\mathrm{d}\delta_{S,W_m}$ 按测度$\bar{\gamma}$ 收敛于$\min\limits_{i=1,2} f_i(S) =$

$f(S)$，所以

$$\lim_{m\to\infty}\int\left[\min_{i=1,2}\int f_i \mathrm{d}\delta_{S,W_m} - \int f \mathrm{d}\delta_{S,W_m}\right]\mathrm{d}\bar{\gamma}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\int\left(\min_{i=1,2}\int f_i \mathrm{d}\delta_{S,W_m}\right)\mathrm{d}\bar{\gamma} - \lim_{m\to\infty}\int f \mathrm{d}\gamma_m$$

$$= 0.$$

因此

$$\min_{i=1,2}\int f_i \mathrm{d}\delta_{S,W_m} - \int f \mathrm{d}\delta_{S,W_m} \to 0$$

按测度 $\bar{\gamma}$ 成立，因此 $f\in\mathscr{M}$.

把支柱是 Ω 的紧致子集的连续函数全体记作 $\mathscr{K}_0(\Omega)$，那么显然 $\mathscr{K}_0(\Omega)\subseteq\mathscr{M}$.

假定 $f\in\mathscr{K}(\hat{\Omega})$，并且当 m 充分大时，

$$f(P) = K(P,Q),\quad P\in\hat{\Omega}\backslash W_m,\quad Q\neq Q_0,$$

那么对 $S\in\Delta$，

$$f(S) = q^{\delta_{S,W_m}}(Q) = \int f \mathrm{d}\delta_{S,W_m},$$

因此 $f\in\mathscr{M}$.

现在如果 S_1 和 S_2 是 Δ 上不同两点，那么由于 K_{S_1}，K_{S_2}是不同的函数，我们可以在 Ω 里取出 Q_1 和 Q_2 使

$$K_{S_1}(Q_1)K_{S_2}(Q_2) - K_{S_2}(Q_1)K_{S_1}(Q_2) \neq 0.$$

对 K_{S_1}，K_{S_2}又各可以作上面所说的 $\mathscr{M}$ 里的函数 f_1 和 f_2，于是得到

$$f_1(S_1)f_2(S_2) - f_1(S_2)f_2(S_1) \neq 0.$$

因此当 S_1 和 S_2 至少有一点属于 Ω 的时候也这样. 因此，由 Stone 定理(引理 6)知道 $\mathscr{M}$ 在 $\mathscr{K}(\hat{\Omega})$里稠密. 可是，在一致收敛拓扑下 $\mathscr{M}$ 是闭的，因此 $\mathscr{M}=\mathscr{K}(\hat{\Omega})$，这样就说明了(5.7.3)对所有的 $f\in\mathscr{K}(\hat{\Omega})$成立.

由(5.7.3)得到 $\bar{\gamma}(\Delta_0)=0$.

已证明了 $\bar{\gamma}$ 存在，再证明 $\bar{\gamma}$ 唯一. 假定$\bar{\gamma}'(\Delta_0)=0$ 并且

$$q^{\bar{\gamma}'} = q^{\bar{\gamma}} = q^{\gamma},$$

那么对任何 $f\in\mathscr{K}(\hat{\Omega})$，

$$\int f\,\mathrm{d}\bar{\gamma}' = \lim_{m\to\infty}\int\left(\int f\mathrm{d}\delta_{S,W_m}\right)\mathrm{d}\,\bar{\gamma}'(e_S).$$

对任何 (B) 集 e，令$\gamma'_m(e)=\int\delta_{S,W_m}(e)\mathrm{d}\,\bar{\gamma}'(e_S)$，那么$\gamma'_m$ 是分布在 $B(W_m)$ 上的一个测度，并且

$$\begin{aligned} q^{\gamma'_m}(Q) &= \iint K(P,Q)\mathrm{d}\delta_{S,W_m}(e_P)\mathrm{d}\,\bar{\gamma}'(e_S) \\ &= \int q^{\delta_{S,W_m}}(Q)\mathrm{d}\,\bar{\gamma}'(e_S) \\ &= q^{\gamma_m}(Q). \end{aligned}$$

因此对任何 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$，即 φ是支柱在 Ω 的紧致子集的无限次可微函数，如果把 $\varphi(P)$ 写成$\int K(P,Q)\mathrm{d}\lambda(e_Q)$ 的话，

$$\begin{aligned} \int\varphi\mathrm{d}\,\gamma'_m &= \iint K(P,Q)\mathrm{d}\lambda(e_Q)\mathrm{d}\gamma'_m(e_P) \\ &= \int q^{\gamma'_m}(Q)\mathrm{d}\lambda(e_Q) = \int q^{\gamma_m}(Q)\mathrm{d}\lambda(e_Q) \\ &= \int\varphi\mathrm{d}\gamma_m. \end{aligned}$$

因此，对任何 $\varphi\in\mathscr{K}_0(\Omega)$，$\int\varphi\mathrm{d}\,\gamma'_m=\int\varphi\mathrm{d}\gamma_m$. 这说明

$$\gamma'_m = \gamma_m.$$

现在 γ'_m 浑收敛于$\bar{\gamma}'$，γ_m 浑收敛于 $\bar{\gamma}$，所以$\bar{\gamma}'=\bar{\gamma}$. ▌

从上面的证明过程还得到

推论 1 假定 μ 是分布在 Δ 的一个正测度，那么由 q^{μ} 所决定的测度 μ_m(关于前面所说的那样一列收敛于 Ω 的单调增加的子区域 W_m)浑收敛于一个分布在 Δ_1 上的正测度. 特别是，对任何 $S\in\Delta$，δ_{S,W_m}浑收敛于一个分布在 Δ_1 上的正测度.

定理 5.7.2 里这个唯一的测度 $\bar{\gamma}$，Martin 称它为**正统测度**. 它

的总质量等于 $u(Q_0)=q^{\bar{\gamma}}(Q_0)$. 任何一个 $u\in\mathscr{H}^+$ 可以表示作一个唯一的 $q^{\bar{\gamma}}$，因此特别当 $u(Q_0)=1$ 的时候，也就是 $u\in\mathscr{B}$ 时，u 是总质量等于 1 的正统测度的 Martin 位势，也就是

$$u(Q)=\int K(S,Q)\mathrm{d}\bar{\gamma}(e_S),\quad \bar{\gamma}(\Delta)=\bar{\gamma}(\Delta_1)=1.$$

$\bar{\gamma}$ 可以看作分布在 $\mathscr{B}$ 的极端元素全体上的一个单位测度. $K_S(Q)$ 是极端元素，因此可以说每个 $u\in\mathscr{B}$ 是当 $\mathscr{B}$ 的边界上有某种特殊的质量分布 $\bar{\gamma}$ 后的重心，这分布是由元素 u 唯一决定的.

这是通常空间中凸区域的一个非常直观的性质，Choquet 曾经根据这个直观想法建立了抽象情形下的这种测度的存在和唯一性定理.

附录　现代位势论简介

近几十年来，位势理论有了较大的发展．为了反映这个发展的概貌，我们根据张鸣镛教授在 80 年代初为研究生开设“现代位势理论”课程的听课笔记，整理编写了这个“现代位势论简介”（以下简称“简介”），作为本书正文的一个补充．

“简介”首先对位势理论的发展历史做一回顾，然后分五个部分作介绍．其中 § 1、§ 2 与正文联系较密切，但这里从较一般的空间上的一般位势核出发来讨论基本原理，同时采用 F. Riesz，Brelot 等人的方法，从上调和函数出发在 $\mathscr{E}$ 空间上叙述位势理论，介绍以简化函数及扫除函数为基本工具的现代方法；这里还以 Constantinescu-Cornea 定理来统一处理包括 Martin 边界在内的各种理想边界；另外，在给出 Dirichlet 原理时，还介绍了 Deny 开创的广义函数的位势．

§ 3 介绍 Abel 群上的位势理论，即考虑测度核的位势．这个专题也是现代位势理论的一个重要组成部分．对于其中与前两节有交叉的内容，这里相当于给出所谓“粗的观点”的一种表达．

§ 4 介绍当代最引人注目的公理位势理论及其与随机过程的结合．限于篇幅，这里主要是给出各种调和空间及其相应的基本概念、基本思想以及与它们密切关联的部分结论．

§ 5 简单讨论位势论与其他数学分支的联系及其发展．主要说明位势论与函数论及概率论的联系．由于位势论与 Brown 运动的密切联系，位势论为概率论提供了分析的工具，丰富发展了概率论；接着探讨了位势论对函数论的作用以及对其他数学分支的影响．后者取材于张鸣镛教授的综合研究报告“势位论的发展和影响”（1979）、“势位论和函数论的关系的回顾和展望”（1980）．

最后以张鸣镛教授的一个设想来结束全文.

"简介"虽作为正文的补充,但其本身有较大的独立性,所采用的记号、术语与本书正文不尽一致.在正文中点用 $P,Q,\cdots$ 表示,距离记为 r_{PQ},积分记为$\int f(P)\mathrm{d}\mu(e_P)$,而在附录中分别记为 $x,y,\cdots,|x-y|$ 以及$\int f(x)\mathrm{d}\mu(x)$.在正文中欧氏空间记为 $\boldsymbol{E}^n$,而附录中记为 $\boldsymbol{R}^n$,等等.我们未能加以统一.好在两种记号在文献中也是并行的.

为简明起见,附录中给出的定理及结论,都略去其证明过程.限于编者水平,错漏难免,敬请读者指正.

厦门大学数学系位势论组

现代位势论简介目录

位势论发展简史……(250)

§1 一般核的位势……(252)

1.1 位势的基本原理……(253)

1.2 K 容量与平衡原理……(254)

1.3 扫除问题……(256)

1.4 α 上调和函数……(258)

1.5 广义函数的位势……(259)

1.6 ξ-Dirichlet 空间……(261)

§2 抽象位势及理想边界……(261)

2.1 $\mathscr{S}$ 空间及抽象位势……(261)

2.2 Green 空间……(263)

2.3 细拓扑及细边界值……(265)

2.4 $\mathscr{S}$ 空间上的 Dirichlet 问题……(267)

2.5 抽象边界及极小边界……(268)

2.6 C.C. 紧致化与理想边界……(269)

§3 Abel 群上的位势论……(272)

3.1 卷积半群……(273)

3.2 位势核、位势……(274)

3.3 超过测度与不变测度……(274)

3.4 基本原理……(275)

3.5 Lévy-Khinchin 公式……(277)

3.6 Hunt 核……(277)

§4 公理位势论……(278)

4.1 超调和簇……(278)

4.2 可解集、正则集……(279)

4.3 调和空间……(281)

4.4 Brelot 空间与 Bauer 空间 ………………………………… (283)
4.5 调和空间位势论略述……………………………………… (284)
4.6 调和空间上的 Markov 过程 ……………………………… (285)
§5 位势论与其他数学分支的联系及发展 ………………… (287)
5.1 位势论与概率论的联系 …………………………………… (288)
5.2 位势论与其他数学分支的联系及发展…………………… (291)
5.3 展望 …………………………………………………………… (293)

位势论发展简史

位势论起源于物理学的万有引力学说和静电学. 远在 18 世纪,Lagrange 就注意到力场是一个函数(称为 Newton 位势)的梯度. 在三维欧氏空间,一个单位质点 ε_y 的引力场在点 $x(x\neq y)$ 的 Newton 位势等于把一个单位质点从无穷远移到 x 点所做的功,其值为 $\frac{1}{|x-y|}$. 因此,一个质量分布 μ 的引力场在 x 的 Newton 位势是

$$U^{\mu}(x)=\int\frac{1}{|x-y|}\mathrm{d}\mu(y).$$

Laplace 进一步证明了,在不分布质量的地方,位势满足偏微分方程 $\Delta u=0$. 这样,物理问题便化为求解偏微分方程的数学问题.

在 19 世纪前期,Poisson 给出了球域上 Dirichlet 问题解的积分公式;Green 对边界充分光滑的有界区域,从物理直观并借助于所谓的 Green 函数给出了解. 后来,Gauss 采用变分法解决了平衡问题并得到 Dirichlet 问题的新解法. Dirichlet 和 Riemann 利用所谓 Dirichlet 原理给出了解. 在 19 世纪后期,有 Schwarz 交错法,特别是 Poincaré 提出了对后来的发展有重要意义的扫除法. 但是,由于缺乏足够的数学工具,这些解法是不严密的.

在 19 世纪,对解的性质也进行了研究. Earnshaw 证明了 Dirichlet 解的极值原理;Riemann 把位势论与函数论做统一处理,揭示了 Green 函数、位势与保形映射之间的密切联系;Harnack 建立了 Harnack 不等式与 Harnack 收敛原理. 此外,关于 Neumann 问题及多重调和函数的研究也有不少成果.

这样一来,到了上世纪末,位势论的三个基本原理,即极小值原理、收敛性质以及 Dirichlet 问题已经建立. 但是,一直到上世纪末,位势论的研究限于 n 维欧氏空间的 Newton 位势($n\geqslant3$)和对数位势($n=2$),即所谓经典位势论.

本世纪以来，随着测度和积分理论、泛函分析、一般拓扑学、抽象代数以及概率论的发展，位势论也得到蓬勃发展，开辟了新的研究方向，创造了新的方法.

本世纪初，一个重要的发现是 Zaremba(1909)所揭示的去心球体的 Dirichlet 问题未必可解；更有深刻意义的不可解区域由 Lebesgue(1913)利用所谓 Lebesgue 刺给出. 这导致了对区域边界不正则点的研究和广义 Dirichlet 问题的提出. 前者由 Kellogg, Bouligand, Wiener 等人完全解决；而 Perron 提出关于一般区域的广义 Dirichlet 问题并给出新的解法，经过 Wiener，特别是 Brelot 的改进和推广，得到了解的存在和唯一性定理的一般形式. 此外，Keldysh 等人在 30 年代还研究了 Dirichlet 解的稳定性.

20 年代中期，F. Riesz 引进了上(下)调和函数的概念，这为位势论研究提供了新的方法；Riesz 分解定理建立了上、下调和函数与位势之间的紧密联系；而对上调和函数连续性的研究导致了细拓扑概念的引入.

30 年代，Vallée-Poussin 用现代观点改进并发展了 Poincaré 扫除法；Frostman 发展了 Gauss 变分法，成功地解决了紧集的平衡问题和扫除问题. 同时，位势论推广到了非古典核的情况，特别是 M. Riesz 核. 它对应于非局部微分积分算子，已不属于通常偏微分方程所关联的位势核了.

从 40 年代起，泛函分析、拓扑学的方法系统地引入位势论并使它发展到一个新水平. H. Cartan(1941～1946)利用 Hilbert 空间理论研究具有有限能量的测度，得到很大的成功. 同时，R. S. Martin 建立了 Martin 边界理论，导致了关于正上调和函数及理想边界理论的深入研究；Deny 用 Schwartz 广义函数论解决了完备化问题；Choquet 建立了一般容量理论及可容性定理，并用紧凸集的极端点理论改进了 Martin 定理的证明. 此外，对于更一般的空间(例如流形、局部紧的 Abel 群)和更一般形式的位势核的位势论也有了深入的探讨.

前边讲过，在 19 世纪末，位势论的三个基本原理已经建立. 进一步的发展使这些原理的重要性日益突出，因为无论是古典的还是现代的，位势论中的许多其他性质可以由这些原理导出. 联系到数学基础研究中的公理化思想，就逐步建立起位势论的公理化体系，也就是公理化位势理论. 这是近三十年来位势论迅速发展中的显著特点之一. Tautz，Doob，Brelot，Bauer，Bony，Constantinescu 和 Cornea 等人分别给出不同的公理系统，建立各种形式的调和空间位势论（最近，关于多重调和空间的公理系统也建立起来了）；而 Deny 等则从能量和 Dirichlet 积分等概念出发建立了称为 Dirichlet 空间的公理理论.

正如前边说明的，位势论发展的显著特点是广泛地利用了近代拓扑、泛函分析、概率论等的思想与方法，同时反过来，它也影响了其他数学分支的发展. 我们可以看到它越来越广泛深入地与相邻分支，如复分析（包括 Riemann 曲面）、拓扑学、几何测度论、微分几何、微分方程、调和分析等相互结合与渗透. 例如它与随机过程论之联系的深入研究，同时促进了这两个分支的繁荣与发展. 在 Doob，Hunt，Meyer 和钟开莱等人出色工作的基础上所产生的所谓概率位势论或 Markov 过程位势论及有关课题，正吸引着大批学者去做深入的研究.

§1　一般核的位势

设 Ω 是局部紧的 Hausdorff 空间，$K(x,y)$ 是从 $\Omega\times\Omega$ 到 $(-\infty,+\infty]$ 的下半连续函数，μ 是 Radon 测度（当 $\mu\geqslant 0$ 时称为正测度），则 $U_K^\mu(x):=\int K(x,y)\mathrm{d}\mu(y)$ 称为以 K 为核的 μ 的位势，或称为**一般核的位势**.

显然，当核不同的时候，所得到的位势一般说来具有不同性质. 若 $K(x,y)\geqslant 0$ 恒成立时，称 K 为**正核**；若 $\check{K}(x,y)=$

$K(y,x)$，则称$\check{K}$ 为 K 的**转置核**；当$\check{K}=K$ 时，称为**对称核**；当 Ω 是 Abel 群而 K 满足 $K(x,y)=k(x-y)$时，称 K 为**平移不变核**；若对任何具有紧支柱的测度 μ，有

$$I_K[\mu]:=\iint K(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)\geqslant 0,$$

$I_K[\mu]$ 也可记为$(\mu,\mu)_\Omega^K$，则称 K 为**正定核**；若上式等号仅当 $\mu=0$ 时成立，则称 K 为**严格正定核**，或满足**能量原理**. 这里顺便提一下，$I_K(\mu,\nu):=\iint K(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y)$ 叫 μ,ν 的**相互能量**，$I_K(\mu,\nu)$ 也可以记为$(\mu,\nu)_\Omega^K$.

特别情况，当 Ω 为欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$，$K(x,y)=|x-y|^{\alpha-n}$，其中 $|\cdot|$ 是欧氏范数，$n\geqslant 2,0<\alpha<n$，则称K 为 α **核**或 M. Riesz **核**. 它是一个正的、对称的、平移不变的、严格正定的核. α 核的位势常记作 $U_{(\alpha)}^\mu$，称为 α **级位势**或者 **Riesz 位势**. α 级能量 $\iint|x-y|^{\alpha-n}\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)$ 记为$I_\alpha[\mu]$或$(\mu,\mu)^\alpha$. 当$n>2$，2 级位势就是 Newton 位势；而当 $n=2$ 时，$K(x,y)=-\log_e|x-y|$ 为对数核，其位势即对数位势. Newton 位势与对数位势合称为经典位势，它们与 Laplace 方程有直接联系；而一般的 α 级位势则联系于非局部微分积分算子.

1.1 位势的基本原理

对一种固定的核 K，常考虑其对应的位势 U_K^μ 是否满足下述一些称为原理的基本性质. 令 μ,λ,ν 是任意正测度，令 $\mathrm{supp}(\mu)$ 表示测度 μ 的支柱.

(1) 若由 U_K^μ 在$\mathrm{supp}(\mu)$ 连续可推出 U_K^μ 在 Ω 连续，则称 K 满足**连续性原理** (continuity principle)；

(2) 若由 $U_K^\mu\leqslant M$ 在$\mathrm{supp}(\mu)$ 成立可推出$U_K^\mu\leqslant M$ 在 Ω 成立，则称 K 满足 **第一极大值原理**；

(3) 若存在常数 $c=c(K)$ 使得由 $U_K^\mu\leqslant M$ 在$\mathrm{supp}(\mu)$ 成立可

推出 $U_K^{\mu} \leqslant cM$ 在 Ω 成立，则称 K 满足**广义极大值原理**；

(4) 若由 $U_K^{\mu} \leqslant U_K^{\nu}$ 在$\mathrm{supp}(\mu)$ 成立可推出该不等式在 Ω 成立，则称 K 满足**第二极大值原理或凌驾原理**；

(5) 若对任何满足 $I_K[\mu] < \infty, I_K[\nu] < \infty$ 的正测度 μ,ν，由 $U_K^{\mu} = U_K^{\nu}$ 在$\mathrm{supp}(\mu) \cup \mathrm{supp}(\nu)$ 似乎处处成立可推出 $\mu = \nu$，则称 K 满足**唯一性原理**；

(6) 若对任意 μ,ν 存在 λ 使得 $U_K^{\lambda}(x) = \min\{U_K^{\mu}(x), U_K^{\nu}(x)\}$，则称 K 满足**下包络原理**(U_K^{λ} 称为 U_K^{μ} 及 U_K^{ν} 的**下包络**).

此外，还有(7)能量原理，(8)弱平衡原理；(9)平衡原理；(10)扫除原理. 能量原理在本节开头已讲到. 平衡原理、扫除原理及其有关的平衡问题、扫除问题将在下边两段中进一步说明. 这两个问题以及 Dirichlet 问题是经典位势论的三大基本问题，也是现代位势论研究的重要内容.

在一定条件下，一些原理之间有蕴涵或等价关系. 下面用"甲→乙"或"乙←甲"表示甲原理成立蕴涵乙原理成立，而"甲↚乙"表示存在满足乙原理而不满足甲原理的例子. 那么(2)⇄(3)，(10)→(4)，(9)→(8). 当 K 是正的广义连续(即从 $\Omega \times \Omega$ 到$[0, +\infty]$的连续的满射)的对称核，且当 $x \neq y$ 时取有限值，则还有(3)⇄(1)，(2)⇄(9)，(4)⇄(10).

$\mathbf{R}^n$ 的 α 核满足(1)，(3)，(4)，(5)，(6)，(7)，(8)，(10)；当 $0 < \alpha \leqslant 2$ 而 $\alpha < n$ 时，α 核还满足(2)，(9). 但当 $2 < \alpha < n$ 时，存在不满足(2)的例子. 深入研究核与各原理之间的关系是位势论的一大课题. Choquet 及日本一些学者在这方面有许多研究成果.

1.2 K 容量与平衡原理

本段中限定 λ, μ, ν 为正测度. 对一个取定的核 K，令

$$V_K(\mu) := \sup\{U_K^{\mu}(x) \mid x \in \mathrm{supp}(\mu)\}.$$

对紧集 F，称$\mathrm{Cap}_K(F) := \sup\{\mu(\Omega) \mid V_K(\mu) \leqslant 1, \mathrm{supp}(\mu) \subseteq F\}$ 为

F 的 **K 容量**. Cap_K 是定义在 Ω 的紧子集全体上的一个非负集函数. 在一定条件下, Cap_K 是一个 Choquet 容量. 称一个性质 $P = P(x)$ 为 **K 近乎处处成立**, 指的是使 P 不成立的 Ω 中的点所组成的集合 A 满足

$$V_*(A) := \inf\{V_K(\mu) \mid \mu(\Omega) = 1, \mathrm{supp}(\mu) \subseteq A\} = +\infty.$$

若对于任何紧集 $F \subseteq \Omega$, 存在支柱包含于 F 的单位测度 μ 使得 $U_K^\mu(x)$ 在 F 上近乎处处等于某个常数 $E_K(F)$, 则称核 K 满足**弱平衡原理**; 若同时有 $U_K^\mu(x) \leqslant E_K(F)$ 在 Ω 上处处成立, 则称 K 满足**平衡原理**. 一个正的、对称的、广义连续的核满足平衡原理的充要条件是它满足第一极大值原理. 一般地, 当 $E_K(F) > 0$ 时,

$$\mathrm{Cap}_K(F) = \frac{1}{E_K(F)}.$$

若核 K 满足弱平衡原理, 那么关于紧集 F 满足弱平衡原理的单位测度 μ 称为 F 的 **K 平衡测度**. 当 $E_K(F) > 0$ 时, $\lambda := \frac{1}{E_K(F)}\mu$ 称为 F 的 **K 容量分布**. 这时, $U_K^\lambda(x)$ 在 F 上近乎处处等于 1. 因此有的文献上把这里的容量分布称为平衡测度, 这是因为 Gauss 平衡问题就是求满足 U_K^λ 在 F 上处处等于 1 的测度 λ.

特别是在 $\boldsymbol{R}^n$ 考虑 α 核, 令 $W_\alpha(F) := \inf\{I_\alpha[\mu] \mid \mu(\boldsymbol{R}^n) = 1, \mathrm{supp}(\mu) \subseteq F\}$. 当 $W_\alpha(F) > 0$ 时, $\mathrm{Cap}_\alpha(F) := \frac{1}{W_\alpha(F)}$ 称为紧集 F 的 **α 容量**. 它是一种 Choquet 容量且为 F 关于 α 核的 K 容量. 与 Newton 容量类似, 可定义 α 外(内)容量、α 零内容集、α 零容集等概念. α 核满足平衡原理, 这时 F 的容量分布 λ 满足 $I_\alpha[\lambda] = \mathrm{Cap}_\alpha(F) = \lambda(\boldsymbol{R}^n)$. 当 $\mathrm{Cap}_\alpha(F) > 0$ 时, λ 可看成下列各变分问题的唯一解:

(1) $\lambda(\boldsymbol{R}^n) = \max\{\nu(\boldsymbol{R}^n) \mid V_\alpha(\nu) = 1, \mathrm{supp}(\nu) \subseteq F\}$, 其中

$$V_\alpha(\nu) := \sup\{U_{(\alpha)}^\nu(x) \mid x \in \mathrm{supp}(\nu)\};$$

(2) $V_\alpha(\lambda) = \min\{V_\alpha(\nu) \mid \mathrm{supp}(\nu) \subseteq F, \nu(\boldsymbol{R}^n) = \mathrm{Cap}_\alpha(F)\}$;

(3) $I_\alpha[\lambda]-2\lambda(\mathbf{R}^n)=\min\{I_\alpha[\nu]-2\nu(\mathbf{R}^n)\mid \mathrm{supp}(\nu)\subseteq F\}$.

并且，α 容量与 Newton 容量或对数容量一样，也满足容量压缩原理且可用广义超限直径来描绘它的度量性质.

与容量，特别是零外容集，密切关联的一个概念是极集(polar set). 对 Ω 的子集 E 及取定的核 K，若存在 μ 使得位势 $U_K^\mu(x)$ 在 E 上点点取 $+\infty$ 值，则称 E 为关于核 K 的**极集**或 **K 极集**. 据假定，K 是下半连续的，所以 $\{x\mid U_K^\mu(x)=+\infty\}$ 必是 G_δ 型集，而且 K 极集必是 K 零外容集. 特别，关于 $\mathbf{R}^n$ 的 Newton 核($n\geqslant 3$)，Evans 定理指出，若 E 为 G_δ 型零容集，则必存在一个集中在 E 上的测度 μ 使得 $U_K^\mu(x)$ 在 E 上，且仅在 E 上取 $+\infty$ 值. 而对 α 核，E 为 **α 极集**被定义为存在 μ(μ 未必集中在 E)使得 $U_{(\alpha)}^\mu$ 在 E 上，且仅在 E 上取值为 $+\infty$. 从而 E 为 α 极集当且仅当 E 是 α 零容的 G_δ 集. 这个结论也称为广义 Evans 定理.

1.3 扫除问题

称核 K 满足**扫除原理**，指的是对 Ω 的任何紧子集 F 及满足 $U_K^\mu\not\equiv+\infty$ 的正测度 μ，扫除问题有解，即存在正测度 $\mu':=\beta_F\mu$，$\mathrm{supp}(\mu')\subseteq F$，使得

$$U_K^{\mu'}(x)\leqslant U_K^\mu(x)$$

在 Ω 中处处成立，而其中等号在 F 上 K 近乎处处成立. 这样的 $\mu'=\beta_F\mu$ 称为把正质量(正测度)μ 扫到 F 的 **K 扫除测度**(balayage measure)，$U_K^{\mu'}$ 称为 **K 扫除位势**. 求解扫除测度的过程叫扫除.

当 $\Omega=\mathbf{R}^n$，$0<\alpha\leqslant 2$，$\alpha<n$ 时，α 核满足扫除原理；而当 $2<\alpha<n$ 时，关于 α 核的测度扫除一般无解，但可采用 Deny 的方法求广义函数的扫除(见 1.5). 本段仅涉及 $0<\alpha\leqslant 2$ 的测度扫除. 对于一般的 Borel 集 E，如果仅要求 $\mu'=\beta_F\mu$ 集中在 $\overline{E}$ 上，即 $\mu'(\mathbf{R}^n\setminus\overline{E})=0$ 时，关于 α 核的测度扫除也有解，但可不唯一. 为此，把其中作为测度网 $\{\beta_F\mu\}_{F\in\mathscr{F}}$(这里 $\mathscr{F}$ 是 E 的紧子集全体以包含关系为序的定

向集)的浑极限 μ' 作为 μ 的扫除测度，它具有如下特征：μ' 是在 E 上 α 似乎处处(即除去一个 α 零容子集外)满足 $U^{\lambda}_{(\alpha)}(x) \geqslant U^{\mu}_{(\alpha)}(x)$ 的位势族 $\{U^{\lambda}_{(\alpha)}(x)\}$ 的下确界函数.

对于 α 能量有限的正测度 μ，α 扫除与经典位势中的扫除一样，Cartan 定理成立. 由于 α 核满足能量原理，α 能量有限的测度全体 $\mathscr{E}_\alpha$ 以 α 级相互能量 $I_\alpha(\lambda,\mu) = \iint |x-y|^{\alpha-n} \mathrm{d}\lambda(x)\mathrm{d}\mu(y)$ 为内积构成实的准 Hilbert 空间(或候补 Hilbert 空间)，其中正测度全体 $\mathscr{E}^+_\alpha$ 及支柱包含于紧集 F 的正测度全体 $\mathscr{E}^+_\alpha(F)$ 都是 $\mathscr{E}_\alpha$ 的完备凸子锥. 于是，$\mu \in \mathscr{E}^+_\alpha$ 在 $\mathscr{E}^+_\alpha(F)$ 的正交投影存在且唯一，它就是 μ 到 F 的 α 扫除测度.

关于 α 核的扫除. Dirac 测度 ε_x 到 Borel 集 E 的扫除测度 $\beta_E\varepsilon_x$ 称为 E 的 α-Green **测度**. 对任意正测度 μ，

$$\beta_E\mu = \int_{\mathrm{supp}(\mu)} \beta_E\varepsilon_x \mathrm{d}\mu(x).$$

2-Green 测度又称 **Green 测度**.

进一步，$x_0 \in \overline{E}$ 称为 Borel 集 E 的 α **正则点**指的是 $\beta_E\varepsilon_{x_0} = \varepsilon_{x_0}$；当上式不成立时，称 x_0 为 E 的 α **非正则点**. E 的内点必正则，因此 α 非正则点必定是 E 的边界点. 一个 Borel 集 E 的 α 非正则点全体 E_1 可能比集 E 还大，甚至存在这样的 E，使得 α 容量 $\mathrm{Cap}_\alpha(E_1)$ 与 $\mathrm{Cap}_\alpha(E)$ 之比可大于任意事先指定的正数. 但 Kellogg 引理指出，$E \cap E_1$ 必为 α 零容集. 值得注意的是，一个开集 W 的 α 正则点与 α 正则边界点的含义是不同的，后者指的是 $\boldsymbol{R}^n \setminus W$ 的 α 正则点，它与 α 调和函数的 Dirichlet 问题有关. 2 正则点就是通常关于 Newton 核的正则点. 著名的 Wiener 判别法指出，$x_0 \in B(E)$ 为 E 的 α 非正则点的充要条件是对 $q \in (0,1)$ 及

$$E_k := \{x \mid q^{k+1} \leqslant |x - x_0| < q^k\} \cap E,$$

有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Cap}_\alpha(E_k)}{q^{k(n-\alpha)}} < \infty.$$

它还有一些别的等价形式.

利用 α 扫除还可以定义 α-Green 函数. 对 $\boldsymbol{R}^n$ 的开子集 D 中的点 y,用 ε_y' 表示 ε_y 到 $\boldsymbol{R}^n\setminus D$ 的 α-扫除测度,那么

$$G^{(\alpha)}(x,y) := U_{(\alpha)}^{\varepsilon_y}(x) - U_{(\alpha)}^{\varepsilon_y'}(x)$$

称为以 y 为极的 D 的 **α-Green 函数**. 特别,2-Green 函数就是通常的 Green 函数. $G^{(\alpha)}$ 具有如下性质:

(1) 在 D 中,$G^{(\alpha)}>0$;在 $\boldsymbol{R}^n\setminus D$,$G^{(\alpha)}$ 似乎处处为 0;

(2) 在 $D\setminus\{y\}$,作为 x 的函数为 α 调和且在 y 的邻域与 α 核具有相同的奇性;

(3) 对称性,即 $G^{(\alpha)}(x,y)=G^{(\alpha)}(y,x)$.

1.4 α 上调和函数

在本段中,若没有另外申明,都限定 $0<\alpha<2$,$\alpha<n$. 从 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $[0,+\infty]$ 的函数 f,$n\geqslant 2$,若满足下述条件则称为 **α 上调和函数**:

(1) f 非负下半连续且 $f\not\equiv+\infty$;

(2) $\displaystyle\int_{|x|>1} f(x)|x|^{-(n+\alpha)}\mathrm{d}x<+\infty$;

(3) 对每个 $x\in\boldsymbol{R}^n$,对充分小的正数 r 总有

$$\varepsilon_\alpha^{(r)} * f(x) := \int f(x-y)\mathrm{d}\varepsilon_\alpha^{(r)}(y) \leqslant f(x),$$

其中

$$\varepsilon_\alpha^{(r)}(y)=\begin{cases}0, & \text{当 } |y|<r,\\ \Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\pi^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)}\sin\dfrac{\pi\alpha}{2}\cdot r^\alpha(|y|^2-r^2)^{-\frac{\alpha}{2}}|y|^{-n}, & \text{当 } |y|>r.\end{cases}$$

例如,$\mu\geqslant 0$ 时,α 位势 $U_{(\alpha)}^\mu$ 为 α 上调和函数但不是上调和函数(有时为了方便,也把上调和函数称为 2 上调和函数);而当 $2\leqslant\alpha<n$ 时,$U_{(\alpha)}^\mu$ 是 2 上调和.

α 上调和函数 f 及其序列 $\{f_n\}$ 有许多类似 2 上调和的性质. 例如,对固定的正数 r,$f*\varepsilon_\alpha^{(r)}(x)$ 仍为 α 上调和且当 r 递减趋于 0

时，$f*\varepsilon_{\alpha}^{(r)}(x)\to f(x)$；若在某个 $x_0\in\boldsymbol{R}^n$，f 达到极小值，则 $f(x)\equiv f(x_0)$；不减列$\{f_n\}$的极限要么恒等于$+\infty$，要么为 α 上调和.

从 $\boldsymbol{R}^n$ 到$(-\infty,+\infty)$的函数 f 称为在 $x_0\in\boldsymbol{R}^n$ 为 α 调和的，若满足下述条件：

(1) f 在 x_0 的一个邻域连续；

(2) $\displaystyle\int_{|x|>1} f(x)|x|^{-(n+\alpha)}\mathrm{d}x<\infty$；

(3) 对充分小的正数 r，恒有 $f(x_0)=\varepsilon_{\alpha}^{(r)}*f(x_0)$.

若 f 在集合 $D\subseteq\boldsymbol{R}^n$ 的每个点为 α 调和，就说 f 在 D 为 α 调和. 例如 α 位势 $U_{(\alpha)}^{\mu}$，$\mu\geqslant 0$，在 μ 的支柱外为 α 调和；常值函数在 $\boldsymbol{R}^n$ 为 α 调和.

值得注意的是，测度 $\varepsilon_{\alpha}^{(r)}$ 的支柱为$\{x\,|\,|x|\geqslant r\}$，因此 α 调和及 α 上调和都不是局部性质. 又 α 调和函数 f 为 α 上调和当且仅当 $f\geqslant 0$. 这是明显区别于通常调和及上调和的两个特点. 但对 α 上调和函数仍有类似的 Riesz 分解，特别当 $n\geqslant 3$ 时，这种分解有简单的形式：

$$f(x)=U_{(\alpha)}^{\mu}(x)+A,$$

其中 $\mu\geqslant 0$，A 是非负常数. 若 f 是 α 调和，则 $\mu=0$，即 $f\equiv A$.

1.5 广义函数的位势

从 $\boldsymbol{R}^n$ 到$[-\infty,+\infty]$的函数 f，若存在自然数 m，使得

$$\int|f(x)|(1+|x|^2)^{-m}\mathrm{d}x<\infty,$$

就称 f 为**缓增函数**. 缓增函数全体记为 $\mathscr{S}^*$. 若广义函数 k 的 Fourier 变换 $\widetilde{k}$ 是通常函数（只要求几乎处处有定义）且满足 $\widetilde{k}\geqslant 0$，$(\widetilde{k})^{-1}\in\mathscr{S}^*$ 时，则称 k 为**广义函数核**，这时必有 $\widetilde{k}\in\mathscr{S}^*$. 例如，正规化的 α 核函数 $k_{\alpha}(x)=A(n,\alpha)|x|^{\alpha-n}$，$1<\alpha<n$，其中 $A(n,\alpha)=\pi^{\alpha-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n-\alpha}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$，有 $\widetilde{k}_{\alpha}=|x|^{-\alpha}\in\mathscr{S}^*$. 因此 k_{α} 是广义函数核.

取定一个广义函数核 k，记 $\mathscr{M} := \{t \in \mathscr{S}^* \mid \tilde{t}$ 为函数且 t 的能量 $\|t\|^2 := \int \tilde{k}|\tilde{t}|^2 \mathrm{d}x < \infty\}$. $\mathscr{M}$ 关于内积

$$\langle t_1, t_2 \rangle := \int \tilde{k}\tilde{t}_1(x)\bar{\tilde{t}}_2(x)\mathrm{d}x$$

成为 Hilbert 空间. 若 $t \in \mathscr{M}$，则 $\tilde{k}\tilde{t} \in \mathscr{S}^*$，因此可确定一个满足 $\tilde{U} = \tilde{k}\tilde{t}$ 的广义函数 U^t，称之为 t 的**以 k 为广义函数核的位势**或**广义函数的位势**. 特别是，当 t 的支柱为紧时，有 $U^t = k * t$，与 t 为测度时的位势表达式一致；而当 $t \geqslant 0$ 时，U^t 为函数.

利用投影算子，可对广义函数的位势讨论容量、扫除和平衡问题. 下面以 k_α 为例来说明. 这时，$\mathscr{M}$ 表示 α 能量有限的广义函数全体，它就是 α 能量有限的 Radon 测度全体 $\mathscr{E}_\alpha$ 以相互能量 $I_\alpha(\mu,\nu)$ 为内积的准 Hilbert 空间的完备化. 若把 $\mathscr{M}$ 中那些支柱包含于 $\boldsymbol{R}^n$ 的紧子集 K 的广义函数全体记为 $\mathscr{M}_K$，那么 $\mathscr{M}_K$ 是 $\mathscr{M}$ 的子 Hilbert 空间. $t \in \mathscr{M}$ 到 $\mathscr{M}_K$ 的投影 t' 存在且唯一，且 $U^t(x) = U^{t'}(x)$ 在 K 的内部(开核) $\mathring{K}$ 上几乎处处成立. 这时，令 $b_K t := t'$，称为**广义函数 t 到紧集 K 的扫除**.

又，在 $\mathring{K}$ 中满足 $U^g(x) \equiv 1$ 的 $\mathscr{M}$ 中元素 g(这样的 g 必存在)，其扫除 $g' = b_K g$ 是 $\mathscr{M}_K = \{t_1\}$ 中使 $\|t_1 - g\|^2$ 达到极小的唯一解. 这个 g' 称为 K 上的**平衡分布**，又称 $\|g'\|$ 为 K 的**谱测度**. 当 $0 < \alpha \leqslant 2$ 时，它们分别与把 k_α 看成一般核时的容量测度及 α 容量一致；而当 $\alpha > 2$ 时，前面已说过，关于测度的扫除问题一般无解，但这里则用广义函数的扫除解决了.

特别，对广义函数核 k_2，$\mathscr{M}$ 中广义函数 t 的位势 U^t 称为**广义函数的 Newton 位势**，它是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 BL_0 函数且

$$\|t\|^2 = \frac{1}{4\pi}\int |\operatorname{grad} U^t(x)|^2 \mathrm{d}x;$$

反之，任何 BL_0 函数几乎处处等于某个广义函数的 Newton 位势. 双层位势可视为 U^t 的特殊情形. 这里所谓 **BL_0 函数**指的是从 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $[-\infty, +\infty]$ 的满足下列条件的函数：

(1) 在几乎所有平行于坐标轴$Ox_i(i=1,2,\cdots,n)$的直线上，$f(x)$是x的分量x_i的绝对连续函数；

(2) 在$\boldsymbol{R}^n$上，$D[f]:=\int|\operatorname{grad}f|^2\mathrm{d}x<\infty$；

(3) $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{1}{r^{n-1}}\displaystyle\int_{|x|=r}f(x)\mathrm{d}x=0$.

1.6 ξ-Dirichlet 空间

这里介绍的空间比 Beurling 或 Deny 所引入的 Dirichlet 空间稍为一般些. 设X是局部紧的 Hausdorff 空间，ξ是X上一个处处稠密的正 Randon 测度(指对任意非空开集G，$\xi(G)>0$). 令$\mathscr{D}=(X,\xi)$是X上局部ξ可积的复值函数全体所组成的 Hilbert 空间. 若下列三个条件成立，就说$\mathscr{D}$是 **ξ-Dirichlet 空间**：

(1) 对任何紧集K，存在常数$a(K)>0$，使得

$$\int_K|u|\mathrm{d}\xi\leqslant a(K)\|u\|,\quad u\in\mathscr{D};$$

(2) $\mathscr{C}_c(X)\cap\mathscr{D}$在$\mathscr{C}_c(X)$及$\mathscr{D}$中稠密，这里$\mathscr{C}_c(X)$表示$X$上具有紧支柱的连续的复值函数全体；

(3) 对从复平面到其自身的压缩映射T(指T满足$T(0)=0$及$|T(z_1)-T(z_2)|\leqslant|z_1-z_2|$)及任意$u\in\mathscr{D}$总有$Tu\in\mathscr{D}$且$\|Tu\|\leqslant\|u\|$.

若对于$u\in\mathscr{D}$，存在 Radon 测度μ使得$(u,f)=\int_X\bar{f}\mathrm{d}\mu$，$f\in\mathscr{C}_c(X)\cap\mathscr{D}$，则称$u$为$\mu$的**位势**. 特别地，当$\mu\geqslant0$时称为**纯位势**. 对于任何纯位势，相应的下包络、平衡、扫除及电容器原理等都成立.

§2 抽象位势及理想边界

2.1 $\mathscr{E}$空间及抽象位势

Brelot 等人定义并深入地研究了函数在$\boldsymbol{R}^n$的无穷远点的调

和性，并把 $\boldsymbol{R}^n$ 上的位势论推广到 $\mathscr{E}$ 空间上去.

若从 $\boldsymbol{R}^n(n\geqslant 2)$ 到 $(-\infty,+\infty)$ 的函数 f 在 ∞ 的邻域调和并可表示为

$$f(x)=C-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k(x)}{|x|^{2k-1}},$$

其中 C 为常数，$H_k(x)$ 是调和的、关于 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的分量的齐 k 次多项式，那么 f 在 ∞ 有有限的极限 $f(\infty)$，它等于以任何一点 $x_0\in\boldsymbol{R}^n$ 为中心、半径充分大的球面 $S(x_0,r)$ 上 f 的平均值. 这时，称 f **在 ∞ 调和**. 进一步，f 在 ∞ 的上(下、超、亚)调和等概念也可用平均值来相应定义.

一个连通的可分的 Hausdorff 空间 Ω 若满足下述条件则称为 **$\mathscr{E}$ 空间**：对每个点 $x\in\Omega$，都存在一个开邻域 V_x 及一个从 V_x 到 $\overline{\boldsymbol{R}}^n=\boldsymbol{R}^n\cup\{\infty\}$ 的一个开集上的同胚 $y\to m_x(y)$，使得对任何两点 $x_1,x_2\in\Omega$，它们所对应的开邻域 V_{x_1} 及 V_{x_2} 之交 $V_{x_1}\cap V_{x_2}$ 的同胚像 $m_{x_1}(V_{x_1}\cap V_{x_2})$ 及 $m_{x_2}(V_{x_1}\cap V_{x_2})$ 在映射 $m_{x_2}\circ m_{x_1}^{-1}$ 之下是共形的(当 $n=2$ 时)或保距的且保持 ∞ 不变(当 $n\geqslant 3$ 时，此时 ∞ 的原像称为 Ω 上的无穷远点).

于是，$\overline{\boldsymbol{R}}^n$ 上的调和、上(下)调和、超(亚)调和等局部性概念可在 $\mathscr{E}$ 空间上相应地定义. 不难看到，局部的 Riesz 分解也成立.

在 $\mathscr{E}$ 空间或它的开子集上，一个非负上调和函数当其最大调和下属(必存在)为常数 0 时，则称为**抽象位势**或简称**位势**. 两个抽象位势之和或下包络仍为抽象位势.

对 $\mathscr{E}$ 空间 Ω，常用到局部极集的概念. 对子区域 ω，集合 $E\subseteq\omega$ 称为 ω 中的**极集**指的是存在 ω 内的一个正的上调和函数 u，它至少在 E 上点点取 $+\infty$ 值(从下面 Riesz 分解定理知道，在 $\boldsymbol{R}^n(n\geqslant 3)$，这里定义的极集与前面用 Newton 位势来定义的概念一致)；对开集 ω，集合 $E\subseteq\omega$ 称为 ω 中的**极集**是指 E 在 ω 的每个连通成分上都是极集. 进一步，对开集 ω，$E\subseteq\omega$ 称为 ω 中的**局部极集**指的是对每个 $x\in\omega$，存在开邻域 V_x 使得 $E\cap V_x$ 是 V_x 中的极集. 单点

集$\{x_0\}$不是局部极集当且仅当 x_0 是 $\boldsymbol{R}^n(n\geqslant 3)$的无穷远点的原像.

性质 P 称为**似乎处处成立**,指的是除了一个局部极集外成立.

若 E 是区域 ω 的局部极集且为闭集,则 $\omega\backslash E$ 仍是区域,且 $\omega\backslash E$上的任何局部下有界的上调和函数可唯一地延拓成 ω 的上调和函数.

2.2 Green 空间

一个 $\mathscr{E}$ 空间 Ω 称为 **Green 空间**指的是 Ω 上存在一个(抽象)位势 $u>0$,或者说存在一个非常数的上调和函数 $v>0$. 例如 $\boldsymbol{R}^n$, $\overline{\boldsymbol{R}}^n$ 及 Riemann 曲面都是 $\mathscr{E}$ 空间;当 $n\geqslant 3$ 时,$\boldsymbol{R}^n$ 及其子区域都是 Green 空间,$\boldsymbol{R}^2$ 或复球面不是 Green 空间,但从中除去一个正容开集后的连通成分是 Green 空间.

Green 空间的子区域仍是 Green 空间;$\mathscr{E}$ 空间 Ω 若不是 Green 空间,则其子区域 ω 是 Green 空间当且仅当 $\Omega\backslash\omega$ 不是局部极集. 在 Green 空间 Ω 中,局部极集等价于极集.

在 Green 空间 Ω 中,$x_0\in\Omega$,那些在 $\Omega\backslash\{x_0\}$调和的所有 Ω 上的位势都是成比例的,其中满足下列条件的位势称为**抽象 Green 函数**或简称 Green 函数,记为 $G_{x_0}^{\Omega}$或 G_{x_0}:令 $h(r)=r^{2-n}$(当 $n\geqslant 3$)或$-\log_e r$(当 $n=2$),其中 $r>0$,那么在 x_0 的邻域,$G_{x_0}(x)$ 可以表示为

$$G_{x_0}(x)=\begin{cases} h(|m_{x_0}(x)-m_{x_0}(x_0)|)+h_1(m_{x_0}(x)), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{当 } m_{x_0}(x_0)\neq\infty, \\ -h(|m_{x_0}(x)|)+h_2(m_{x_0}(x)), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{当 } m_{x_0}(x_0)=\infty, \end{cases}$$

其中 h_1,h_2 调和. 显然,当$\{x_0\}$ 不是极集时,$G_{x_0}(y)$ 是有界连续的. G_{x_0} 满足对称性,即 $G_x(y)=G_y(x)$,因此往往记为 $G(x,y)$.

在 Green 空间 Ω 上,对任何正测度 μ,$\int G(x,y)\mathrm{d}\mu(y)$ 是超调

和函数，它要么是位势（称为 **Green 位势**），要么恒等于 $+\infty$；反之，Ω 上的任何位势都是 Green 位势，这时 $G(x,y)$ 称为 **Green 核**.

在 Ω 上，Riesz 分解定理成立，即 Ω 上的任何一个有调和下属的上调和函数 u 必对应唯一的正测度 μ（称为**相关测度**）使得

$$u(x)=\int G(x,y)\mathrm{d}\mu(y)+u^*(x),\quad x\in\Omega,$$

此处 u^* 是 u 在 Ω 的最大调和下属. 这个分解还具有局部特征，即在 Ω 的任何子区域 ω 上，μ 在 ω 的限制也是 u 在 ω 的相关测度. 又 Green 核满足扫除原理，而且关于测度的扫除可以通过下述扫除函数来定义. 简化函数及扫除函数是用来研究上调和函数位势论的有力工具，它们可在更一般的空间上定义.

设 Φ 是一族从拓扑空间 (Ω,τ) 到 $[0,+\infty]$ 的下半连续函数所组成的凸锥. 对于 Ω 的子集 E 及 E 上有定义的实函数 f，称 $R_f^E(x):=\inf\{u(x)\,|\,u\in\Phi$ 且 $u|_E\geqslant f\}$ 为 f 在 E 的**简化函数**（reduced function）.

在 Green 空间 Ω 上，常取 Φ 为非负超调和函数全体. 对上调和函数 $f\geqslant 0$，R_f^E 似乎处处等于上调和函数 $\hat{R}_f^E(x)$，这里 $\hat{R}_f^E(x):=\varliminf_{y\to x}R_f^E(y)$，称为 f 的**上调和扫除函数**，它在 $\Omega\setminus\overline{E}$ 调和而且 $\hat{R}_f^E\leqslant f$ 在 Ω 点点成立，其中等号在 E 上似乎处处成立. 这时，正测度 μ 的位势 $u=\int G(x,y)\mathrm{d}\mu(y)$ 的扫除函数 $\hat{R}_u^E$ 是另一个正测度（记作 b_μ^E）的位势，这个 b_μ^E 称为 μ 到 E 的**扫除测度**，它集中在 E 的基 $B_E:=\{x\,|\,E$ 在 x 不瘦$\}\subseteq\overline{E}$. 因此，当 E 是闭集时，b_μ^E 就是关于 Green 核的扫除问题的解 $\mu'=\beta_\mu E$. 此外，E 是极集当且仅当下列命题中有一个成立：

(a) 对任何上调和函数 $f>0$，有 $\hat{R}_f^E=0$；

(b) Ω 上存在一个数值函数 $h>0$ 使得 $\hat{R}_h^E$ 在某个点 $x_0\in\Omega$ 取零值（特别 $R_h^E(x_0)=0$）或等价地 $\hat{R}_h^E=0$；

(c) $\hat{R}_1^E<1$ 处处成立.

上调和函数 $f\geqslant 0$ 到一个区域 ω 的余集 $C(\omega)$ 的扫除函数 $\hat{R}_f^{C(\omega)}$ 在 ω 的限制就是以 f 为边值的广义 Dirichlet 问题的解. 不过,若 $\bar{\omega}$ 非紧,则应补充定义 ω 的 Alexandroff 边界点 ∞ 上 f 的值 $f(\infty)=0$. 又,当 E 为紧且非极集,则 $\hat{R}_1^E$ 给出了 Gauss 平衡问题的解,它在 E 上似乎处处等于 1.

2.3 细拓扑及细边界值

设 (X,τ) 是拓扑空间,Φ 是一族从 X 到 $[0,+\infty]$ 的下半连续函数所组成的凸锥,必要时还设 $+\infty\in\Phi$. 若把形如 $\{x\in X\mid f(x)<a\}$(其中 $f\in\Phi,a\geqslant 0$)的集合全体记为 τ',那么由 $\tau\cup\tau'$ 所生成的拓扑 τ_1 是使 Φ 中每个函数都连续的最粗拓扑. 称 τ_1 为 X 上(相对于 Φ 与 τ 的)**细拓扑**或 **Φ 细拓朴**. 细拓扑下的开集、闭集、闭包、极限等分别称为细开集、细闭集、细闭包、细极限等. 在 Green 空间,总取 Φ 为非负超调和函数全体. 特别是考虑 $\boldsymbol{R}^n$ 的 Green 区域时,就得到通常的细拓扑(参见本书第四章).

与 Φ 细拓扑密切关联的是 Φ 瘦(简称瘦)的概念. 对于 X 的子集 E,对于任何 $x_0\notin E$,称 E 在 x_0 **瘦**指的是下面两种情形之一:

(1) $x_0\notin\overline{E}$(τ 闭包);

(2) $x_0\in\overline{E}$ 且存在 $u\in\Phi$ 使得 $\varliminf\limits_{E\ni x\to x_0} u(x)>u(x_0)$.

对于任何 $x_0\in E$,称 E 在 x_0 **弱瘦**指的是对 $f\equiv 1$,关于 Φ 的扫除函数 $\hat{R}_f^E$ 满足

$$\inf\{\hat{R}_f^{E\cap\sigma}(x_0)\mid \sigma\text{ 是 }x_0\text{ 的邻域}\}<1.$$

进一步,对任何 $x_0\in E$,称 E 在 x_0 **瘦**指的是 $E\backslash\{x_0\}$ 在 x_0 瘦且 E 在 x_0 为弱瘦. 若 $\Omega\backslash E$ 在 E 的每一点都瘦,则称 E 为**肥集**. 推广的 Cartan 定理指出,E 是细开集当且仅当 E 是肥集. 因此也可以把肥集全体定义为细拓扑 τ_1. 又集合 E 的非正则点可定义为"$E\backslash\{x_0\}$ 在该点瘦".

若 Φ 表示 α 上调和函数全体,那么 Φ 细拓扑及 Φ 瘦分别称为

α **细拓扑及** α **瘦**. α 细拓扑严格细于通常欧氏拓扑且当 $\alpha'<\alpha$ 时，α' 细拓扑严格细于 α 细拓扑. $\boldsymbol{R}^n$ 的子集 E 在 x_0 为 α 瘦当且仅当 x_0 为 E 的 α 非正则点. 因此，关于 α 非正则点的 Wiener 判别法实即 α 瘦的判别法.

若集合 E 可表示为在每一点 $x\in X$ 都弱瘦的集合的可列并，则称 E 为**半极集**. Brelot 下包络定理指出，对 Φ 中的元素列 $\{u_i\}$，集合 $\{x\in X \mid (\widehat{\inf_i u_i})(x)<\inf_i u_i(x)\}$ 是半极集. 半极集的概念是为了在一般空间上推广极集的概念而引入的. 但是在 Green 空间 $X=\Omega$ 上，E 是极集当且仅当它是半极集. 另外，在 $\boldsymbol{R}^n$ 的 Green 区域上也还引入半瘦及相应的半细拓扑的概念.

细拓扑及半细拓扑等概念常用于研究函数的边界性态. 一个区域 D 上的函数 $f(x)$ 当 x 从 D 内趋于边界点 x_0 时有 $f(x)\to a$，则称 a 为 f 在 x_0 的**边界值**. 当 f 在 x_0 的边界值不存在时，若限制 x 沿 D 的某个子集趋于 x_0，f 可能有极限. 特别是当 $D\cup B(D)$ 上有细拓扑时，若限制 x 在 $x_0\in B(D)$ 的一个细邻域趋于 x_0 时有 $f(x)\to b$，则称 f 在 x_0 有细极限 b. 半细极限值可类似定义.

又，在 $\boldsymbol{R}^n$ 的 Lipschitz 区域 D 上常考虑所谓不相切的边界值，它是 $\boldsymbol{R}^2$ 上 Stoltz 边界极限值的推广. 若 D 上的函数 f 当 $x\in D$ 沿着任何以 $x_0\in B(D)$ 为顶点的不相切内锥 Γ 时（即存在以 x_0 为顶点的锥 Γ' 使得 $\Gamma\setminus\{x_0\}\subseteq\Gamma'\subset D$），$f(x)$ 有相同的极限值 a，则称 f 在 x_0 有**不相切的边界值** a.

经典的 Fatou 定理称，$\boldsymbol{R}^n$ 的球内的非负调和函数在边界上几乎处处有不相切的极限. Doob 定理把它推广到远为一般的情形，即对 Green 空间 D 附加其 Martin 边界 Δ（见后）所得紧空间 $D\cup\Delta$ 上的细拓扑，D 中的上调和函数 $u>0$ 及调和函数 $h>0$ 的商 u/h 在 Δ 上除去一个 μ_h 零测集（这里 μ_h 是 h 的 Martin 表现测度）外处处有细边界值. 作为特例，在 Lipschitz 区域 D 内的上调和函数 $u>0$ 在 $B(D)$ 上除了一个调和测度为零的集合外，处处有细边界

值.

1968 年～1971 年,Hunt 与 Wheeden 深入研究了 Lipschitz 区域 D 上不相切边界值与细(半细)边界值的关系,指出 D 中任何函数若在 $x_0\in B(D)$有不相切边界值,则在 x_0 有与之相等的(半)细边界值;若正上调和函数在 x_0 有半细边界值,则在 x_0 有相等的不相切边界值. 国内有人把最后的结论推广到较一般的区域上的一般调和函数,并结合 α 细边界值做了许多有趣的工作.

2.4 $\mathscr{E}$ 空间上的 Dirichlet 问题

设 Ω 是 $\mathscr{E}$ 空间,D 是 Ω 的开子集且 $\Omega\backslash D$ 不是局部极集.

先考虑 $D\cup B(D)$为紧的情形. 对从 $B(D)$到$[-\infty,+\infty]$的函数 f,D 上的超调和函数 u,若对每个 $y\in B(D)$恒有

$$\varliminf_{x\to y} u(x)\geqslant f(y),$$

则称 u 为(相对于 f)的**上函数**;只要做明显的改动就得到**下函数**的定义. 令

$$\overline{H}_f(x)=\inf\{u(x)\,|\,u\text{ 为相对于 }f\text{ 的上函数}\},$$

$$\underline{H}_f(x)=\sup\{v(x)\,|\,v\text{ 为相对于 }f\text{ 的下函数}\},$$

那么 $\underline{H}_f=-\overline{H}_{-f}$,且 $\underline{H}_f(x)\leqslant\overline{H}_f(x)$. 若此式的等号处处成立且为有限值,则称 f 为**可解的**,并且把 $H_f(x)=\underline{H}_f(x)=\overline{H}_f(x)$ 称为以 f 为边界值的广义的 Dirichlet 问题的解或 **PWB**(Perron-Wiener-Brelot)**解**. 当 f 是有限连续时,f 必定可解,而且

$$H_f(x)=\int f(y)\mathrm{d}\rho_x^D(y),\quad x\in D,$$

这里 ρ_x^D 是 $B(D)$关于 $x\in D$ 的调和测度,即 Dirac 测度 ϵ_x 在 $\Omega\backslash D$ 的扫除测度. 在一般情况下,$\overline{H}_f(x)=\int^* f\mathrm{d}\rho_x^D$,其中$\int^*$表示上积分. f 可解的充要条件是 f 关于每个 $x\in D$(或关于 D 的每个连通分支的一个 x) 为 ρ_x^D 可积. $y\in B(D)$ 是 D 的正则边界点当且仅当对 $B(D)$ 上的每个有限连续函数 f 总有 $\lim\limits_{D\ni x\to y} H_f(x)=f(y)$. 另外,$y$

$\in B(D)$ 为 D 的正则边界点的充要条件是存在 y 的一个邻域 V 使得在 $D\cap V$ 上存在一个上调和函数 $g>0$ 使得 g 在 y 以 0 为极限；若 D 是区域，这等价于对 D 上的 Green 函数 $G_y(z)$，当 $z\to y$ 时有 $G_y(z)\to 0$. 一般地，$y\in B(D)$ 非正则当且仅当 y 是 D 的某个连通分支的非正则边界点. 又，对 $B(D)$ 上每个有上界的函数 f 及每个正则边界点 y 有 $\overline{\lim}_{D\ni x\to y} H_f(x)\leqslant \overline{\lim}_{B(D)\ni\xi\to y} f(\xi)$. 当 $n\geqslant 3$ 时，若无穷远点是上述 D 的边界点必为正则.

再考虑 $D\cup B(D)$ 非紧的情形. 这时，因 Ω 非紧，考虑其添加 Alexandroff 点 ∞ 后所得到的紧空间 Ω' 及 D 在 Ω' 上的边界 $B(D^*)=B(D)\cup\{\infty\}$. 对 $B(D)$ 上的函数 f 补充定义它的值 $f(\infty)=0$. 这时可类似地考虑 Dirichlet 问题且有与前边类似的可解性定理. 对于非 ∞ 的边界点 y，即 $y\in B(D)$，正则点的定义与性质也相同，$B(D)$ 上的非正则点全体也是一个局部极集.

2.5 抽象边界与极小边界

在非空集合 Ω 上赋予拓扑 τ. 设 I 是非空指标集. 若对每个 $i\in I$，对应着一族开集组成的一个滤基(base of filters)$\mathscr{B}_i$，则在 $\Omega\cup I$ 上存在满足下述条件的拓扑 τ_1：

(1) τ_1 在 Ω 的诱导拓扑正好是 τ；

(2) 对任意 $i\in I$，Ω 与 i 的全体邻域的交构成 Ω 上的由 $\mathscr{B}_i$ 生成的滤子.

于是，关于 τ_1，I 是 Ω 的边界，称为 Ω 的**抽象边界**.

这样的拓扑中有最细的，它使得 Ω 为开集并在 I 上诱导离散拓扑，而且 $\mathscr{B}_i$ 中的集合与 i 之并全体构成 i 的邻域基. 又，在使 Ω 为开集的上述拓扑中最粗的记为 τ_m，若 (Ω,τ) 是 Hausdorff 空间，则 $(\Omega\cup I,\tau_m)$ 也是 Hausdorff 空间.

设 (Ω,τ) 是拓扑空间，$\Omega\neq\varnothing$，一族从 Ω 到 $[0,+\infty)$ 的连续函数组成的凸锥 $\mathscr{U}$ 以及一族从 Ω 到 $[0,+\infty]$ 的下半连续函数组成的凸锥 $\mathscr{P}$ 分别称为**抽象调和锥**及**抽象位势锥**，指的是它们满足下

列两个条件：

(1) 若 $u\in\mathscr{U}$，$p\in\mathscr{P}$ 且 $u\leqslant p$，则 $u=0$；

(2) 若 $u\in\mathscr{U}$，$v\in\Sigma:=\mathscr{U}+\mathscr{P}=\{h+p\,|\,h\in\mathscr{U},p\in\mathscr{P}\}$，则 $\inf\{u(x),v(x)\}\in\Sigma$.

例如，令 $\mathscr{U}$ 表示 Green 空间上的非负调和函数全体，$\mathscr{P}$ 表示 Green 位势全体(除去 $+\infty$ 外)，则 $\mathscr{U}$ 及 $\mathscr{P}$ 满足上述两个条件，是抽象调和锥及位势锥.

$\mathscr{U}$ 中的元素 $h(h\neq0)$ 称为**极小调和函数**指的是，对任意 $u\in\mathscr{U}$，若 $u\leqslant h$，则存在实数 $a\geqslant0$ 使得 $u=ah$. $h\neq0$ 为极小调和当且仅当 $\bar{h}=\{ah\,|\,a\geqslant0\}$ 是凸锥 $\mathscr{U}$ 的极端母线(extreme generatrix). 若规定 h_1 等价于 h_2 为存在 $a>0$ 使 $h_1=ah_2$，则可把 $\bar{h}$ 看成 h 的等价类. 极小(正)调和函数的概念原是 Martin 在 1941 年引入的，Brelot 等在抽象空间上加以发展. 关于抽象锥的研究已发展成专门的 H 锥理论.

Ω 的子集 E 称为**关于极小调和函数 h 为瘦**(亦称极小瘦)指的是关于凸锥 Σ，h 到 E 的简化函数 $R_h^E\neq h$. 或者等价地定义如下：存在 $p\in\mathscr{P}$ 使得在 E 上有 $p\geqslant h$ 成立. 集族 $\{\Omega\backslash E\,|\,E$ 关于 h 瘦$\}$构成一个滤子 $\mathscr{F}_h$. 与 h 等价的极小调和函数 h'，其对应的滤子 $\mathscr{F}_{h'}=\mathscr{F}_h$. 因此每个等价类 $\bar{h}$ 对应一个唯一的滤子 $\mathscr{F}_h$. 于是，若把 $\bar{h}$ 全体记作 I，它便是前边所讲的抽象边界，称为 Ω 的**极小边界**，它也是后边所讲的极小细拓扑下的边界.

Ω 上相对于凸锥 $\Phi=\Sigma\cup\{+\infty\}$ 的细拓扑记为 τ'，那么 $\mathscr{F}_h$ 中的元素都是 τ' 开集. 在 $\Omega\cup I$ 中关于滤子族$\{\mathscr{F}_{\bar{h}}\}$产生的使 I 成为抽象边界、Ω 为开集的诸拓扑中最粗者 τ_m 称为**极小细拓扑**. 关于 τ_m，从 Ω 内到边界点 $\bar{h}$ 的上、下极限与关于滤子 $\mathscr{F}_{\bar{h}}$ 的上、下极限一致.

2.6 C.C.紧致化与理想边界

在实用中，常根据所考虑的函数族的性质来引入边界且保证

原空间附加边界后是紧的. 著名的 Constantinescu-Cornea 定理给出了统一处理常用的 C. C. 紧致化的办法:若 Ω 是非紧的、局部紧的 Hausdorff 空间,Ψ 是一族从 Ω 到$[-\infty,+\infty]$的连续函数,则存在唯一(至多相差一个同胚)的紧空间 $\hat{\Omega}$ 满足:

(1) Ω 在 $\hat{\Omega}$ 中稠密且为开集;

(2) Ψ 中每个函数 f 能延拓成 $\hat{\Omega}$ 上的连续函数 $\hat{f}$;

(3) $\hat{f}$ 全体能分辨(separate) $\hat{\Omega}\setminus\Omega$ 中的点,

$\Delta := \hat{\Omega}\setminus\Omega$ 就称为 Ω 的**理想边界**. 适当选取 Ψ,可得到位势论中常用的下列紧空间及相应的理想边界:

(a) 当 Ψ 取为空集时,$\hat{\Omega}$ 是 Alexandroff 单点紧致化;

(b) 当 Ψ 取为从 Ω 到$[-\infty,+\infty]$的连续函数全体. $\hat{\Omega}$ 是 Stone-Čech 紧致化;

(c) 当 Ψ 取为如下从 Ω 到$(-\infty,+\infty)$的连续函数 f 全体:在 Ω 中有紧集 K_f 使得 $\Omega\setminus K_f$ 是一些区域之并,而且在每个区域上 f 取常数值,则 $\hat{\Omega}$ 是 Kerekjarto-Stoïlov 紧致化;

(d) 当 Ω 是 $\mathscr{E}$ 空间,Ψ 取为从 Ω 到$(-\infty,+\infty)$的连续的所谓 BLD 函数全体时,$\hat{\Omega}$ 是 Royden 紧致化;

(e) 当 Ω 是 $\mathscr{E}$ 空间,Ψ 是(d)中函数族的一个子族,对其中每个函数 f,Ω 有闭子集 F_f 使得 f 在 $\Omega\setminus F_f$ 里调和且在那些于 F_f 上等于f 的 BLD 函数的 Dirichlet 积分中,f 达到极小,则 $\hat{\Omega}$ 是 Kuramochi 紧致化;

其中(c),(d),(e)三种紧致化与理想边界还常用于研究 Riemann 曲面分类、聚值论及 HB,HD,HP 函数. (c)还用于研究共形映射. 此外,还有(f)Wiener 紧致化,以及下述在位势论中最重要的 Martin 紧致化:

(g) 当 Ω 是 Green 空间,$\Psi=\{K_y(x)\,|\,y\in\Omega\}$,其中 $K_y(x) := K(x,y) := G(x,y)/G(x,y_0)$,$y_0\in\Omega$是任意取定的,$G(x,y)$是 Ω 的 Green 函数. 这时 C. C. 紧致化空间称为 Martin 紧致化或

Martin 空间. $\Delta=\hat{\Omega}\setminus\Omega$ 称为 **Martin 边界**. 一般说来,$\boldsymbol{R}^n$ 的区域 Ω 的欧氏边界 $B(\Omega)$ 与 Δ 全然不同,只是当 Ω 是球或其他较为正则的区域(如 Lipschitz 区域)时两者一致;对 $\boldsymbol{R}^2$ 的单连通 Green 区域 Ω,Δ 等同于 Carathéodory 分歧边界.

Martin 空间 $\hat{\Omega}$ 是可度量化或可尺度化的,且关于这种度量为完备. $\hat{\Omega}$ 也可通过在 Ω 中先引入一个与 $K(x,y)$ 有关的度量,使其对应的拓扑与原拓扑等价,再由关于这个度量的完备化得到.

在 Martin 空间 $\hat{\Omega}$ 中,对 Ω 上的极小正调和函数 u,必存在唯一的 $X\in\Delta$ 使得 $u(y)=u(y_0)K(X,y)$,这样的 X 称为 Δ 的**极小点**. 极小点全体记作 Δ_1,它是一个 G_δ 型集. 利用 Choquet 关于紧凸集的极端点定理容易给出下述 Martin 积分表现定理的较简单的证明:对 Ω 上任何非负调和函数 u,必存在唯一的分布在 Δ_1 上的 Radon 测度 $\mu\geqslant 0$,使得

$$u(y)=\int K(X,y)\mathrm{d}\mu(X),\quad y\in\Omega.$$

上式也称为 Martin-Choquet 积分表示,其右端是双层位势的推广. 当 Ω 为 $\boldsymbol{R}^n$ 的球时,$K(X,y)$就是 Poisson 核. 其实,Martin 边界原来就是为了把 Poisson 积分表示推广到一般区域的正调和函数的情形去而设计的.

对 Martin 边界同样可考虑 Dirichlet 问题,可把 Ω 上的细拓扑延拓成为 $\Omega\cup\Delta_1$ 上的极小细拓扑,可类似定义边界点的正则性、比较瘦的性质,讨论函数的边界值问题(参见前述 Fatou-Doob 定理),Martin 边界可翻译成概率的语言并在随机过程论得到应用和推广.

Martin 紧致化有许多推广的形式. 特别是对相当广泛的一类二阶椭圆型方程,可用它们在 $\boldsymbol{R}^n$(甚至一些 n 维流形)上的区域的 Green 函数 $G'(x,y)$ 代替通常 Green 函数 $G(x,y)$,得到与该方程某族极小正解相关联的 Martin 边界 Δ'(有时称作椭圆 Martin 边界)及极小点集Δ'_1,并可进而研究 $\Omega\cup\Delta'$ 上的位势论性质以及方

程的解空间的结构，Δ' 与 Δ 及其他理想边界的关系等. 特别是对二阶自共轭椭圆方程 $Lu = Pu$，这里 L 表示 Laplace 算符，$P \geqslant 0$ 是局部 Hölder 连续函数. 考虑 Riemann 曲面的端 Ω 上于相对边界上取值为 0 的非负解族，用 Δ'_1 表示覆盖在理想边界上的 Martin 边界的极小点集，把 Δ'_1 的基数称为**椭圆维数**（它是 Heins 调和维数这一概念的推广），记作 $\dim P$. 日本 Nakai 等在一些特殊的端（如单位圆盘挖去一点）上对 $\dim P$ 的值域与密度 P 的关系做了许多研究. 国内也有人探讨了覆盖在零容紧集 δ 上的椭圆 Martin 边界及 $\dim P$ 与 δ 的关系.

§3 Abel 群上的位势论

在 1930 年左右发现了 Brown 运动及经典位势论之间的联系. Brown 运动是由它的迁移概率半群（即 Brown 半群）所确定的，它与经典位势论的关系可以描述如下：Laplace 算子是 Brown 半群的无穷小生成元，而 Newton 位势核是 Brown 半群对时间的某种积分. 于是可以从随机过程或函数空间上算子半群出发来建立相应的位势理论. 基本出发点是卷积半群，再由它通过积分得到位势核.

经典位势论是在 $\boldsymbol{R}^n$ 中讨论的，$\boldsymbol{R}^n$ 可以看作一个局部紧的 Abel群. 现在介绍建立在一般的局部紧的 Abel 群上的位势理论.

本节均设 X 是一个局部紧的 Abel 群（简记为 LCA 群）. 用 X 上的测度作为位势核，以所谓"粗"的观点给出相应的位势原理. 用 Γ 表示 X 的对偶群. 若 $\gamma \in \Gamma, x \in X$，通常把 $\gamma(x)$ 记为 (x, γ)，它是模等于 1 的复数.

本节用到下列记号：

$\mathscr{C}(X)$ 表示 X 上连续复值函数全体，$\mathscr{C}_b(x)$ 表示 $\mathscr{C}(X)$ 中有界函数全体，$\mathscr{C}_0(X)$ 是 $\mathscr{C}(X)$ 中在无穷远点以 0 为极限的函数全体，而 $\mathscr{C}_c(X)$ 则是 $\mathscr{C}(X)$ 中具有紧支柱的函数全体. $\mathscr{C}(X)$ 赋予紧

收敛拓扑，$\mathscr{C}_c(X)$赋予 $\mathscr{C}(X)$上的拓扑的诱导拓扑，而 $\mathscr{C}_b(X)$及 $\mathscr{C}_0(X)$赋予一致收敛拓扑.

$\mathscr{M}(X)$是 $\mathscr{C}_c(X)$的对偶空间，即 X 上所有 Radon 测度所组成的线性空间. $\mathscr{M}_b(X)$是 $\mathscr{C}_0(X)$的对偶空间，即 $\mathscr{M}(X)$中有界测度全体. $\mathscr{M}_c(X)$表示 $\mathscr{M}(X)$中具有紧支柱的测度全体. 再用 $\mathscr{M}_b^+(X)$表示 $\mathscr{M}_b(X)$中正测度全体.

3.1 卷积半群

若 $(\mu_t)_{t>0} \subseteq \mathscr{M}_b^+(X)$ 满足如下条件：

(1) 对所有 $t>0$，$\mu_t(X) \leqslant 1$；

(2) 对所有 $t,s>0$，$\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$；

(3) 当 $t \to 0$ 时，μ_t 浑收敛于 Dirac 测度 ε_0，

则称测度族 $(\mu_t)_{t>0}$ 是 X 上的一个（**浑连续的**）**卷积半群**.

令 $\widetilde{\mu}$ 表示 μ 的 Fourier-Stieltjes 变换，即对于 $\mu \in \mathscr{M}_b(X)$，$\gamma \in \Gamma$，有

$$\widetilde{\mu}(\gamma) = \int \overline{(x,\gamma)} \mathrm{d}\mu(x).$$

可以证明，对任何卷积半群 $(\mu_t)_{t>0}$，存在唯一的 Γ 上的连续负定函数 ψ 满足

$$\widetilde{\mu}_t(\gamma) = \mathrm{e}^{-t\psi(\gamma)}.$$

反过来，对 Γ 上任何连续负定函数 ψ，上式确定的$(\mu_t)_{t>0}$是 X 上的卷积半群. 因此，在 X 上的卷积半群与 Γ 上的连续负定函数之间存在着一一对应. 称 $\psi(\gamma)$ 与$(\mu_t)_{t>0}$ 是**关联的**. 又，对正数 λ，定义 X 上的正则度 ρ_λ：

$$\langle \rho_\lambda, f \rangle = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} \langle \mu_t, f \rangle \mathrm{d}t, \quad f \in \mathscr{C}_c(X).$$

$(\rho_\lambda)_{\lambda>0}$满足下列预解方程

$$\rho_\lambda - \rho_\mu = -(\lambda - \mu)\rho_\lambda * \rho_\mu,$$

称测度族$(\rho_\lambda)_{\lambda>0}$是卷积半群$(\mu_t)_{t>0}$的**预解式**(resolvent).

设 $(\mu_t)_{t>0}$ 是卷积半群，若浑积分 $\int_0^\infty \mu_t \mathrm{d}t$ 存在，即对所有 $f \in \mathscr{C}_c^+(X)$，$\int_0^\infty \langle \mu_t, f\rangle \mathrm{d}t < \infty$，则称此半群是**迁移的**(transient) 或**非常返的**. 这时当 $t \to \infty$ 时，μ_t 浑收敛于 0. 若 $(\mu_t)_{t>0}$ 不是迁移的，则称为是**常返的**(recurrent).

3.2 位势核、位势

若 $(\mu_t)_{t>0}$ 是一个迁移卷积半群，则称测度 $\kappa = \int_0^\infty \mu_t \mathrm{d}t$ 为关于 $(\mu_t)_{t>0}$ 的 **位势核**. 令

$$\mathscr{D}^-(\kappa) = \{\sigma \mid \kappa * \sigma \text{存在}, \sigma \in \mathscr{M}^+(X)\}.$$

对于 $\mathscr{D}^+(\kappa)$ 中的测度 σ，称 $\kappa * \sigma$ 为 σ 所生成的 κ **位势**.

设 $\mu \in \mathscr{M}_b^+(X)$，$\mu(X) \leqslant 1$ 且级数 $\sum_{n=1}^\infty \mu^n$ 浑收敛，这里 μ^n 表示 μ 的 n 重卷积，$\mu^0 = \varepsilon_0$，则称 $\kappa := \sum_{n=0}^\infty \mu^n$ 为由 μ 确定的**基本核** (elementary kernel). 它是由 μ 确定的卷积半群$(\mathrm{e}^{-t} \cdot \mathrm{e}^{t\mu})_{t>0}$ 的位势核. 另一方面，若已知 κ 是位势核，则对所有 $a > 0$，$a\kappa + \varepsilon_0$ 是由 $a\rho_a$ 确定的基本核，即 $a\kappa + \varepsilon_0 = \sum_{n=0}^\infty (a\rho_a)^n$.

对一个正测度 κ，若存在 X 的单位元 o 的一个紧邻域基 $\mathscr{V}$ 及满足下述四个条件的基本测度网 $(\sigma_V)_{V\in\mathscr{V}}$，则称 κ 是一个**完全核** (perfect kernel)：

(1) $\sigma_V(X) \leqslant 1$；

(2) $\sigma_V \in \mathscr{D}^+(\kappa)$，$\kappa * \sigma_V \leqslant \kappa$；且 $\kappa * \sigma_V \neq \kappa$；

(3) 在 V 的余集 C_V 上，$\kappa * \sigma_V = \kappa$；

(4) $\kappa * \sigma^n$ 浑收敛于 o(当 $n \to \infty$).

每一个完全核都是位势核. 反之，每个位势核也都是完全核.

3.3 超过测度与不变测度

若 $\xi \in \mathscr{D}^+(\mu)$满足 $\mu * \xi \leqslant \xi$(相应地，$\mu * \xi = \xi$)，则称 ξ 是 μ 上

调和测度（μ **调和测度**）. Haar 测度 ω_X 是 μ 上调和测度. 当且仅当 $\mu(X)=1$ 时，ω_X 是 μ 调和测度.

设 $(\mu_t)_{t>0}$ 是 X 上的卷积半群，ξ 是正测度. 若对所有 $t>0$，ξ 是 μ_t 上调和的，则称 ξ 关于 $(\mu_t)_{t>0}$ 是**超过测度**（excessive measure）；若 ξ 是 μ_t 调和的，则称 ξ 关于 $(\mu_t)_{t>0}$ 是**不变测度**（invariant measure）. Haar 测度 ω_X 是超过测度. 当且仅当 μ_t 是概率测度时，ω_X 才是不变测度. 又，若 κ 是位势核，则对所有 $\sigma\in\mathscr{D}^+(\kappa)$，$\sigma$ 所生成的 κ 位势 $\kappa*\sigma$ 是超过测度. 当且仅当 $\sigma=o$ 时，$\kappa*\sigma$ 是不变测度. 对于每个超过测度 ξ，下列 Riesz 分解式成立：

$$\xi=\kappa*\sigma+\eta,$$

其中 $\sigma\in\mathscr{D}^+(\kappa)$，$\eta$ 是不变测度. 每一个超过测度是一个单调增加的位势网的浑极限.

设 G 是开集，ξ 是超过测度，那么测度

$$R_\xi^G:=\inf\{\mu\,|\,\mu\text{ 是超过测度且在 }G\text{ 上 }\mu\geqslant\xi\}$$

称为 ξ 在 G 上的**简化测度**. R_ξ^G 也是一个超过测度，$R_\xi^G\leqslant\xi$ 而在 G 上有 $R_\xi^G=\xi$. 它的 Riesz 分解式 $R_\xi^G=\kappa*\sigma+\eta$ 满足 $\mathrm{supp}(\sigma)\subseteq\overline{G}$. 若 G 是相对紧的开集，则 R_ξ^G 是一个位势，特别是当 $\xi=\omega_X$ 时它是一个位势. 因此存在唯一的 $\sigma_G\in\mathscr{D}^+(\kappa)$ 使得 $R_{\omega_X}^G=\kappa*\sigma_G$.

对于相对紧的开集 G，令 σ_G 是由上式所确定的唯一的测度，称 $\mathrm{Cap}(G):=\int\mathrm{d}\sigma_G$ 为 G 的 κ **容量**.

3.4 基本原理

位势核 κ 满足下述原理：

1. *扫除原理*

设 κ 是卷积核，$\mu\in\mathscr{D}^+(\kappa)$，$G$ 是开集. 若 $\mu'\in\mathscr{D}^+(\kappa)$ 且满足：

(1) μ' 的支柱 $\mathrm{supp}(\mu')\subseteq\overline{G}$；

(2) $\kappa*\mu'\leqslant\kappa*\mu$；

(3) $\kappa*\mu'|_G=\kappa*\mu|_G$，

则称μ'是μ在G上的κ**扫除测度**.

关于卷积核κ,若对任意$\mu\in\mathscr{M}_c^+(X)$及任意相对紧的开集G,μ在G上的κ扫除测度都存在,则称κ满足**扫除原理**.若对开集G去掉“相对紧”的限制,则称κ**对所有开集满足扫除原理**.

2. 控制原理

对所有$f,g\in\mathscr{C}_c^+(X)$,若对所有$x\in\operatorname{supp}(f)$,$\kappa*f(x)\leqslant\kappa*g(x)$,就可以推出对所有$x\in X$,这个不等式成立,则称$\kappa$满足**控制原理或凌驾原理**.

对所有$f,g\in\mathscr{C}_c^+(X)$,对所有$\epsilon\geqslant0$,若当$x\in\operatorname{supp}(f)$时$\kappa*f(x)\leqslant\kappa*g(x)+\varepsilon$成立就可以推出这不等式在$X$成立,则称$\kappa$满足**完全极大值原理**.

3. 质量唯一性原理(unicity principle of mass)

若对所有$\mu_1,\mu_2\in\mathscr{D}^+(\kappa)$,由$\kappa*\mu_1=\kappa*\mu_2$可推出$\mu_1=\mu_2$,则称$\kappa$满足**质量唯一性原理**.

4. 正质量原理(principle of positivity of mass)

若对所有$\mu_1,\mu_2\in\mathscr{D}^+(\kappa)$,由$\kappa*\mu_1\leqslant\kappa*\mu_2$可推出$\mu_1(X)\leqslant\mu_2(X)$,则称$\kappa$满足**正质量原理**.

5. 平衡原理

若对每个相对紧开集G,存在$\lambda'_G\in\mathscr{D}^+(\kappa)$满足下列条件:

(1) $\operatorname{supp}(\lambda'_G)\subseteq\overline{G}$;

(2) $\kappa*\lambda'_G\leqslant\omega_X$;

(3) $\kappa*\lambda'_G=\omega_X$在$G$上成立,

则称κ满足**平衡原理**,这时λ'_G称为G的κ**平衡分布**.

6. 电容器原理(condenser principle)

设G_1,G_2是开集,$\overline{G}_1\cap\overline{G}_2=\varnothing$且$\overline{G}_1$为紧集,则存在$\mu_1,\mu_2\in\mathscr{D}^+(\kappa)$使得$\xi=\kappa*(\mu_1-\mu_2)$满足:

(1) $o\leqslant\xi\leqslant\omega_X$;

(2) $\xi=\omega_X$在G_1上成立;

(3) $\xi=o$在G_2上成立;

(4) $\mathrm{supp}(\mu_1)\subseteq\overline{G}_1$, $\mathrm{supp}(\mu_2)\subseteq\overline{G}_2$,

这个性质称为**电容器原理**.

3.5 Lévy-Khinchin 公式

设 $(\mu_t)_{t>0}$ 是 X 上的卷积半群，则 $X\setminus\{o\}$ 上的正测度网 $\left(\frac{1}{t}\mu_t\Big|_{X\setminus\{o\}}\right)_{t>0}$ 当 $t\to 0$ 时浑收敛于 $X\setminus\{o\}$ 上的一个正测度 μ. 这个 μ 称为关于 $(\mu_t)_{t>0}$ 的 **Lévy 测度**.

X 的对偶群 Γ 上的一个复值函数 ψ 是一个具有对称 Lévy 测度的连续负定函数的充分必要条件是

$$\psi(\gamma)=c+\mathrm{i}l(\gamma)+q(\gamma)+\int_{X\setminus\{o\}}(1-\mathrm{Re}(x,\gamma))\mathrm{d}\mu(x), \quad (*)$$

其中 $\gamma\in\Gamma$,常数 $c\geqslant 0$,l 是 Γ 到 R 的连续同态,q 是 Γ 上非负连续二次型,μ 是 $X\setminus\{o\}$上的正对称测度且满足

$$\int_{X\setminus\{o\}}(1-\mathrm{Re}(x,\gamma)\mathrm{d}\mu(x)<\infty, \quad \gamma\in\Gamma,$$

并且 c,l,q,μ 由 ψ 唯一确定,即 $c=\psi(0)$,$l=\mathrm{Im}\psi$,μ 是关于 ψ 的 Lévy 测度,$q(\gamma)=\lim\limits_{n\to\infty}\psi(n\gamma)/n^2$. 方程(*)称为 Lévy-Khinchin 公式.

3.6 Hunt 核

比位势核更一般的核有 **Hunt 核**,它指的是满足下列条件的正测度 $\kappa=\int_0^\infty\mu_t\mathrm{d}t$:

(1) $\mu_0=\varepsilon_0$;

(2) 对所有 $t,s\geqslant 0$,$\mu_t*\mu_s=\mu_{t+s}$;

(3) 当 $t\to s$ 时,μ_t 浑收敛于 μ_s.

Hunt 核也满足扫除原理以及推广的电容器原理等位势论基本原理.

§4 公理位势论

本节着重介绍调和函数的公理化理论，也就是所谓调和空间理论. Brelot 调和空间及 Bauer 调和空间将作为其特例给出.

大致上说，在一个局部紧的 Hausdorff 空间上给定一个函数簇(sheaf)，如果它满足几个所谓调和公理(即规定了 Dirichlet 问题的可解性，极小值原理成立的可能性，以及具有某种收敛性质)，就形成了一种调和空间. 与此同时，调和、上(下)调和函数及位势的概念也就得到了定义. 再应用一般核的位势论的典型方法，必要时再予给定的函数簇中添加某些适当的结构，就可很自然地发展成一种上调和函数及位势的理论，它覆盖了一般位势论的大部分的内容.

4.1 超调和簇(hyperharmonic sheaf)

设(X,τ)是拓扑空间. 定义在拓扑τ上的映射$\mathscr{U}$若满足下列条件则称为X上的**函数簇**：

(1) 对每个$U\in\tau$，$\mathscr{U}(U)$是U上的一个函数族；

(2) 对所有$U,V\in\tau$，$U\subseteq V$，若$f\in\mathscr{U}(V)$，则$f|_U\in\mathscr{U}(U)$；

(3) 若$\{V_i|i\in I\}\subseteq\tau$，$W=\bigcup V_i$，$f$是定义在$W$上的函数且对所有$i\in I$有$f|_{V_i}\in\mathscr{U}(V_i)$，则$f\in\mathscr{U}(W)$.

以下均设$X=(X,\tau)$是一个局部紧 Hausdorff 空间. 令$\mathscr{U}$是X上的一个函数簇. 若对任何$U\in\tau$，$\mathscr{U}(U)$是由U上的一族取值于$(-\infty,+\infty]$的下半连续函数所组成的凸锥，$\mathscr{U}$就称为**超调和簇**. 若对任何$U\in\tau$，$\mathscr{U}(U)$是$\mathscr{C}(U)$的线性子空间($\mathscr{C}(U)$表示U上连续函数全体)，$\mathscr{U}$就称为**调和簇**.

如果$\mathscr{U}$是X上的超调和簇. 对任何$U\in\tau$，令$\mathscr{H}_{\mathscr{U}}(U)=\mathscr{U}(U)\cap(-\mathscr{U}(U))$，其中，$-\mathscr{U}(U)=\{-f\mid f\in\mathscr{U}(U)\}$，那么$\mathscr{H}_{\mathscr{U}}$是$X$上的调和簇，称为**与$\mathscr{U}$相关的调和簇**.

4.2 可解集、正则集

设 $\mathscr{U}$ 是(X,τ)上的超调和簇,$U\in\tau$,U 满足下列的条件时称为(关于 $\mathscr{U}$ 的)**MP 集**:对每个 $f\in\mathscr{U}(U)$,若存在紧集 $K=K_f$ 使在 $U\backslash K$ 上 $f\geqslant 0$;且对所有 $y\in B(U)$, $\varliminf\limits_{x\to y} f(x)\geqslant 0$,则在 U 上有 $f\geqslant 0$.

MP 集是使某种形式的极小值原理成立的开集. 取定一个MP 集 U,考虑从 $B(U)$ 到$[-\infty,+\infty]$的函数 f,把$\mathscr{U}(U)$中满足下列条件的元素 u 称为关于 f 的(相对于 $\mathscr{U}$ 的)**上函数**:u 有下界,存在紧集 K 使 $U\backslash K$ 上 $u\geqslant 0$,且对任何 $y\in B(U)$,有

$$\varliminf_{x\to y} u(x)\geqslant f(y).$$

把关于 f 的上函数全体记作 $\overline{\mathscr{U}}_f^U$. 令 $\underline{\mathscr{U}}_f^U:=-\overline{\mathscr{U}}_g^U$, $g=-f$. $\underline{\mathscr{U}}_f^U$ 中的元素叫做关于 f(相对于 $\mathscr{U}$) 的**下函数**. 对于 $x\in U$,令

$$\overline{H}_f^U(x):=\inf\{u(x)\mid u\in\overline{\mathscr{U}}_f^U\},$$

$$\underline{H}_f^U(x):=\sup\{v(x)\mid v\in\underline{\mathscr{U}}_f^U\}.$$

如果 $\overline{H}_f^U=\underline{H}_f^U\in\mathscr{H}_{\mathscr{U}}(U)$,就说 f 在 U 上是相对于 $\mathscr{U}$ **可解的**,其解为 $\overline{H}_f^U$ 即 $\underline{H}_f^U$,就记为 H_f^U(这里 $\mathscr{H}_{\mathscr{U}}$ 是与 $\mathscr{U}$ 相关的调和簇). H_f^U 往往称为广义的(或 Perron-Wiener-Brelot 意义下的)Dirichlet 问题的解. 如果任何 $f\in\mathscr{C}_c(B(U))$(即 $B(U)$ 上具有紧支柱的连续函数) 都是可解的,就说 U 是(相对于 $\mathscr{U}$ 的) **可解集**(resolutive set). 特别是,若把 $\mathscr{H}_{\mathscr{U}}(U)$ 看成 U 上的调和函数全体时,$B(U)$ 上的函数可解就是一般的 Dirichlet 问题可解.

设 U 是相对于 $\mathscr{U}$ 的可解集,则每一个 $f\in\mathscr{C}_c(B(U))$都对应唯一的 $H_f^U\in\mathscr{H}_{\mathscr{U}}(U)$. 取定 $x\in U$,映射 $f\mapsto H_f^U(x)$是 $\mathscr{C}_c(B(U))$ 上的正线性泛函. 据 Riesz 定理,在 $B(U)$上有唯一的正测度 μ_x^U 使得

$$H_f^U(x)=\int f\mathrm{d}\mu_x^U,\quad f\in\mathscr{C}_c(B(U)).$$

μ_x^U 称为 U 在点 x(相对于 $\mathscr{U}$)的**调和测度**. 于是对 $B(U)$上的任一实函数 f,可定义 U 上的函数 $\mu^U f$ 如下:

$$\mu^U f(x) = \int^* f \mathrm{d}\mu_x^U,$$

这里 $\int^*$ 表示上积分.

以下都设 $\mathscr{H}$ 为 X 上的一个调和簇. X 的一个相对紧且边界不空的开子集 V 称为(相对于 $\mathscr{H}$ 的)**正则集**,如果 $B(V)$上的每个连续函数 f 都可唯一地延拓为 $\overline{V}$ 上的连续函数 $\bar{f}$,使得 $\bar{f}|_V \in \mathscr{H}(V)$,并且当 $f \geqslant 0$ 时有 $\bar{f} \geqslant 0$.

若把 $\mathscr{H}(V)$当作 V 上的调和函数全体,那么正则集也就是 Dirichlet 问题可解的开集. 一个区域若是相对于 $\mathscr{H}$ 的正则集,则称为(相对于 $\mathscr{H}$ 的)**正则区域**.

取定正则集 V 及 $x \in V$,那么 $\mathscr{C}(B(V))$ 上的映射 $f \mapsto \bar{f}(x)$ 确定了 $\mathscr{C}(B(V))$ 上的一个正线性泛函,从而有 $B(V)$ 上的唯一正测度 ω_x^V,使得

$$\bar{f}(x) = \int f \mathrm{d}\omega_x^V, \quad f \in \mathscr{C}(B(V)).$$

ω_x^V 也叫做 V 的在点 x(关于 $\mathscr{H}$)的**调和测度**.

为了建立正则集与可解集之间以及两种调和测度之间的联系,通常考虑 ω_x^V 为关于 $\mathscr{U}_{\mathscr{H}}$ 的调和测度并引入拟正则集及正则滤子的概念.

设 W 为 X 的开集,$B(W)$的一个测度族 $\lambda = (\lambda_x)_{x \in W}$ 称为 W 上的一个**扫除**. 设 $\mathscr{F}$ 为 W 上的一个收敛于点 $y \in B(W)$的滤子,若 λ 沿着 $\mathscr{F}$ 浑收敛于 ε_y(单位正质点),则称 $\mathscr{F}$ 为关于扫除 λ 的一个**正则滤子**;否则称 $\mathscr{F}$ 为关于 λ **非正则的**. $\mathscr{F}$ 正则的充分必要条件是:对于每个 $f \in \mathscr{C}_c(B(W))$,有

$$\lim_{x,\mathscr{F}} \lambda f(x) = f(y).$$

设 W 为 X 的相对紧开集. W 上的扫除 λ 若满足下面两条件

则称之为(相对于 $\mathscr{U}$)**拟正则的**：

(1) 对每个 $f\in\mathscr{C}(B(W))$，函数 λf 为有界的 $\mathscr{H}_{\mathscr{U}}$ 函数；

(2) 对每个 $x\in W$，在 W 存在一个非负超调和函数 u，使得 $u(x)$ 为有限，且沿着每个关于 λ 非正则的超滤子，u 收敛于∞.

一个相对紧开集 W 上若存在拟正则扫除，则称 W 为(相对于 $\mathscr{U}$ 的)**拟正则集**.

于是，当 X 的相对紧开集相对于 $\mathscr{H}_{\mathscr{U}}$ 正则时，W 相对于 $\mathscr{U}$ 为拟正则集，而且关于 $\mathscr{H}_{\mathscr{U}}$ 的调和测度族 $\omega^W=(\omega_x^W)_{x\in W}$是 W 上的拟正则扫除且没有非正则的滤子. 每一个拟正则的 MP 集 W 必为可解集，这时，相对于 $\mathscr{U}$ 的调和测度族 $\mu^W=(\mu_x^W)_{x\in W}$是 W 上唯一的拟正则扫除. 另一方面，当 W 为相对于 $\mathscr{U}$ 的相对紧可解集且 μ^W 没有非正则的滤子时，W 关于 $\mathscr{H}_{\mathscr{U}}$ 为正则且 $\omega^W=\mu^W$.

4.3 调和空间

Bauer, Doob 及 Brelot 分别在他们的公理模型中假定 X 上的调和簇 $\mathscr{H}$ 具有：

Bauer 收敛性质 对任何开集 U，若$\{u_n\}\subseteq\mathscr{H}(U)$是单调增加列且极限函数 u 局部有界，则 $u\in\mathscr{H}(U)$；

Doob 收敛性质 对任意开集 U，若$\{u_n\}\subseteq\mathscr{H}(U)$是单调增加列且极限函数 u 在U 的一个稠密子集里取有限值，则 $u\in\mathscr{H}(U)$；

Brelot 收敛性质 对任意区域 U，若$\{u_n\}\subseteq\mathscr{H}(U)$是单调增加列且极限函数 u 在 U 中某一点取有限值，则 $u\in\mathscr{H}(U)$.

显然，具有 Doob 收敛性质时必具有 Bauer 收敛性质，反之不然. 如果 X 是局部连通的，则由 Brelot 收敛性质可推出 Doob 收敛性质，反之亦不然.

由一个局部紧的 Hausdorff 空间 X 及 X 上的一个满足下述各个公理的超调和簇 $\mathscr{U}$ 组成的有序偶$(X,\mathscr{U})$称为**调和空间**(C.C. 调和空间)：

(1) **正公理**(axiom of positivity) $\mathscr{H}_{\mathscr{U}}$ 非退化，即对所有的

$x \in X$,存在开集$U \ni x$以及$h \in \mathscr{H}_{\mathscr{U}}$使得$h(x) \neq 0$;

(2) **可解公理**(axiom of resolutivity) 相对于$\mathscr{U}$的可解集全体构成X的一个拓扑基;

(3) **完备公理**(axiom of completeness) 对任意开集U,若u是U上定义的取值于$(-\infty,+\infty]$的下半连续函数且对任何满足$\overline{V} \subseteq U$的相对紧的可解集V,在V上恒有

$$\mu^V u \leqslant u,$$

其中$\mu^V = (\mu_x^V)_{x \in V}$为关于$\mathscr{U}$的调和测度族,那么$u \in \mathscr{U}(U)$;

(4) **收敛公理**(axiom of convergence) $\mathscr{H}_{\mathscr{U}}$具有Bauer收敛性质.

在调和空间$X=(X,\mathscr{U})$的开集U上,$u \in \mathscr{U}(U)$叫做U上的**超调和函数**(hyperharmonic function);$u \in -\mathscr{U}(U)$叫做U上的**亚调和函数**(hypoharmonic function);$u \in \mathscr{H}_{\mathscr{U}}$叫做$U$上的**调和函数**.若$u$为超调和且在任何满足$\overline{V} \subseteq U$的相对紧可解集$V$上,$\mu^V u$是调和函数(这里$\mu_x$是调和测度),则称$u$是$U$上的**上调和函数**;若$-v$是$U$上的上调和函数,则称$v$是$U$上的**下调和函数**.

若p是U上的非负上调和函数且p在U上的最大调和下属为0(即对所有$h \in \mathscr{H}_{\mathscr{U}}(U)$,若$h \leqslant p$,则$h \leqslant 0$),那么$p$叫做$U$上的**位势**.

U上的上调和函数u若有下调和下属,则必可唯一地分解为$u=p+h$,其中p是位势,h调和且为u的最大的调和下属.这就是调和空间里的Riesz分解定理.

设$\mathscr{B}$是调和空间$(X,\mathscr{U})$中X的相对紧的(相对于$\mathscr{U}$的)可解集全体所构成的基.又设U是X的开集,u是U上的一个下半连续、下有限的数值函数.若U存在一个开覆盖族$\{V_i \mid i \in I\}$使得$U = \bigcup\limits_{i \in I} V_i$且对每个$i \in I$,当$W \in \mathscr{B}$满足$\overline{W} \subset V_i$时必有$\mu^W u \leqslant u$在$W$上成立,则称$u$为$U$上的一个**局部超调和函数**.若对$X$的每个开集$U$,用$\mathscr{U}_1(U)$表示$U$上的局部超调和函数全体,则$\mathscr{U}_1$是

X 上的一个超调和簇，称为由扫除系$((\mu_x^W)_{x\in W})_{W\in\mathscr{B}}$生成的超调和簇. 据完备性公理知道 $\mathscr{U}_1=\mathscr{U}$. 由其他扫除系也可定义相应的局部超调和函数以及生成超调和簇 $\mathscr{U}_2$ 并推出 $\mathscr{U}\subset\mathscr{U}_2$，但未必有 $\mathscr{U}_2\subset\mathscr{U}$. 因此可以说，在某种意义下，完备性公理是为了保证 $\mathscr{U}_2=\mathscr{U}$ 成立而设计的.

从上述看到，调和空间的许多基本概念及它们的性质都是一般位势论中相应概念及结论的抽象概括与推广. 但一般位势论中各具体空间中非共性的东西不能统为一体. 假如在 $\boldsymbol{R}^n$ 中，$n\geqslant 2$，用 $\mathscr{U}$ 表示通常的超调和函数全体，那么当 $n\geqslant 3$ 时，Newton 位势就是调和空间 $\langle\boldsymbol{R}^n,\mathscr{U}\rangle$ 中的位势；而当 $n=2$ 时，对数位势却不是 $\langle\boldsymbol{R}^2,\mathscr{U}\rangle$ 这一调和空间中的位势，因为它不是非负的. 实际上，前者属于所谓 P 调和空间而后者是一般的 S 调和空间.

一般地，一个调和空间 $\langle X,\mathscr{U}\rangle$ 称为 S 调和空间（或 P 调和空间）指的是对所有的 $x\in X$，存在 X 上的一个非负上调和函数（相应地，一个位势）在 x 是严格正的. 显然，P 调和空间必为 S 调和空间，但反之不然.

4.4 Brelot 空间与 Bauer 空间

由局部紧 Hausdorff 空间 X 与 X 上的调和簇 $\mathscr{H}$ 组成的有序偶 $\langle X,\mathscr{H}\rangle$ 称为 **Brelot 空间**，如果满足下列公理：

公理 1 X 没有孤立点而且是局部连通的；

公理 2 相对于 $\mathscr{H}$ 的正则集全体构成 X 的一个拓扑基；

公理 3 $\mathscr{H}$ 具有 Brelot 收敛性质.

若 $\langle X,\mathscr{U}\rangle$ 是 Brelot 空间，则 X 上由 $\mathscr{H}$ 生成的超调和簇 $\mathscr{U}_{\mathscr{H}}$ 满足调和空间公理，即 $\langle X,\mathscr{U}_{\mathscr{H}}\rangle$ 是调和空间. 因此，Brelot 空间是调和空间.

典型例子 在 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 上的任一开集 U 上，如果取 $\mathscr{H}(U)$ 为 U 上满足 Laplace 方程的二次连续可微函数 u 的全体，那么 $\mathscr{H}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的一个调和簇，$\langle\boldsymbol{R}^n,\mathscr{H}\rangle$ 是一个 Brelot 空间. 事

实上，Brelot 空间就是以 Laplace 方程的解族为模型建立起来的. 所以这个空间上的位势论与一般位势论最为接近. 比 Brelot 空间稍为一般的是与一般椭圆型方程相关联的**椭圆调和空间**.

由一个局部紧 Hausdorff 空间 X 与 X 上的一个调和簇 $\mathscr{H}$ 组成的有序偶 $(X,\mathscr{H})$ 称为 **Bauer 空间**，如果它满足：

公理 1 即正公理(见 4.3)；

公理 2 X 有一个由关于 $\mathscr{H}$ 的正则集构成的强基(即一个拓扑基，其中任何两个元素之交仍是关于 $\mathscr{H}$ 的正则集)；

公理 3 $\mathscr{H}$ 具有 Bauer 收敛性质.

Bauer 空间又称 BBCC 空间(Bauer-Boboc-Constantinescu-Cornea 空间). 若 $(X,\mathscr{H})$ 是 Bauer 空间，则由 $\mathscr{H}$ 生成的超调和簇 $\mathscr{U}_{\mathscr{H}}$ 满足调和空间的公理，即 $(X,\mathscr{U}_{\mathscr{H}})$ 是调和空间. 因此 Bauer 空间是调和空间. 每个 Brelot 空间是 Bauer 空间，但反之不然.

典型例子 在 $(n+1)$ 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的任一开集 U 上，取 $\mathscr{H}(U)$ 为 U 上满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial x_{n+1}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

的二次连续可微函数 u 全体，那么 $\mathscr{H}$ 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 上的调和簇，$(\boldsymbol{R}^{n+1},\mathscr{H})$ 是 Bauer 空间，但不是 Brelot 空间.

4.5 调和空间位势论略述

在前几段，调和空间及有关的基本概念已建立. 于是，从超调和函数的连续性的研究可建立细拓扑与瘦的概念. 通过相对于非负超调和函数全体组成的凸锥的简化函数 R_f^e(见 2.2)及其下半连续正则化 $\hat{R}_f^e$，可考虑上调和函数的扫除，测度的扫除并推广容量的概念(例如，把映射 $e\mapsto\hat{R}_f^e$ 当作广义容量来研究)，定义并研究极集、半极集、吸收集(absorbent set)以及和它们相关联的极性公理(axiom of polarity)与凌驾公理；Perron-Wiener-Brelot 解

Dirichlet 问题的方法可照样使用. 另外,可通过在非负上调和函数的凸锥中引入特殊次序(specific order)来研究抽象支柱、似乎连续,建立 Martin 空间、Riesz 空间等,并用所谓 Riesz-Martin 核来求出正上调和函数的积分表达式;通过位势建立次 Markov 半群进而研究调和空间的 Markov 过程. 这是统一处理与发展位势论与随机过程结合的极好办法. 在一定条件下(如对超调和簇或调和簇附加适当结构后),在调和空间可考虑函数的梯度、建立能量的概念并研究 Dirichlet 积分.

总的说来,一般核的位势论研究的主要问题在调和空间上基本上都可相应地考虑且有类似的、更为本质的结果. 当然,这里的困难也不少,如在一般调和空间中,Green 函数不易求得,Dirichlet 积分显然复杂,关于位势的核的认识较不清楚等. 作为统一处理众多问题的理论,出现这种问题是正常的. 当然,其中许多问题尚待进一步探讨.

4.6 调和空间上的 Markov 过程

本段假定 X 是一个具有可数基的 P 调和空间且在 X 上常数 1 是上调和函数.

X 上的测度族 $\mathscr{V}:=(\nu_x)_{x\in X}$ 称为 X 上的(**有界 Borel**)**扩散**,若满足:

(1) 对任何 $f\in\mathscr{C}_c(X)$,函数 $x\to\int f\mathrm{d}\nu_x$ 是 Borel 函数;

(2) 函数 $x\to\nu_x(X)$ 有界.

对 X 上任何取值于$[-\infty,+\infty]$的函数 f,$\mathscr{V}f$ 表示 X 上的函数 $x\mapsto\int^* f\mathrm{d}\nu_x$. 因此,若 f 是有界 Borel 函数,则 $\mathscr{V}f$ 也是. 若 p 是调和空间 X 上的一个有界位势,则 $\mathscr{V}_p:=(\nu_{p,x})_{x\in X}$ 是 X 上的一个扩散,称为**由 p 生成的扩散**,其中 $\nu_{p,x}$ 是 X 上的测度使得对每个 $f\in\mathscr{C}_c(X)$ 且 $f\geqslant 0$,有 $\nu_{p,x}(f)=f\cdot p(x)$,这里 $f\cdot p$ 是所谓的 Boboc-

Constantinescu-Cornea 乘积.

设 $\mathscr{V}'$ 及 $\mathscr{V}''$ 是 X 上的两个扩散，$a\in \boldsymbol{R}_+=[0,+\infty)$，对任何 $x\in X$，令 ν_x 是 X 上的测度：$f\mapsto(\mathscr{V}'f(x)+\mathscr{V}''f(x))$，[相应地，$f\mapsto a\mathscr{V}'f(x)$ 及 $f\to(\mathscr{V}'\mathscr{V}''f)(x)$]，$f\in\mathscr{C}_c(X)$，那么测度族 $(\nu_x)_{x\in X}$ 仍为 X 上的扩散，可表示为 $\mathscr{V}'+\mathscr{V}''$[相应地，$a\mathscr{V}'$ 及 $\mathscr{V}'\mathscr{V}''$].

X 上的一族扩散 $(\mathscr{P}_t)_{t\in\boldsymbol{R}_+}$ 称为 X 上（**弱右连续的）次 Markov 半群**，若它满足下列条件：

（1）对任意 $t\in\boldsymbol{R}_+$，$\mathscr{P}_t1\leqslant1$；

（2）对 $f\in\mathscr{C}_c(X)$ 及任何 $x\in X$，函数 $t\mapsto\mathscr{P}_tf(x)$ 是右连续的；

（3）对任意 $s,t\in\boldsymbol{R}_+$，$\mathscr{P}_s\mathscr{P}_t=\mathscr{P}_{s+t}$.

如果 $\sup\limits_{x\in X}\int_0^\infty\mathscr{P}_t1(x)\mathrm{d}t<\infty$，则称这个半群**可积**.

X 上满足下面条件的扩散族 $(\mathscr{U}_t)_{t\in\boldsymbol{R}_+}$ 称为 X 上的**预解式**(resolvent)：

（1）对所有 $t\in\boldsymbol{R}_+$，$t\mathscr{U}_t1\leqslant1$；

（2）对所有 $s,t\in\boldsymbol{R}_+$，$s<t$，有 $\mathscr{U}_s=\mathscr{U}_t+(t-s)\mathscr{U}_t\mathscr{U}_s$.

一个预解式若满足 $\mathscr{U}_0=\mathscr{V}_p$，$\mathscr{V}_p$ 是有界位势 p 生成的扩散，就叫做**与有界位势 p 相关联的**. 对 X 上任一可积的次 Markov 半群，可具体构造一个称为由它生成的预解式.

设 $\mathscr{P}=(\mathscr{P}_t)_{t\in\boldsymbol{R}_+}$ 是 X 上的次 Markov 半群. f 是 X 上的一个可取 $+\infty$ 的非负 Borel 函数，若满足下述条件则称为 $\mathscr{P}$ **超过函数**：

（1）对所有 $t\in\boldsymbol{R}_+$，$\mathscr{P}_tf\leqslant f$；

（2）对所有 $x\in X$，$\lim\limits_{t\to0}\mathscr{P}_tf(x)=f(x)$.

设 $\mathscr{U}:=(\mathscr{U}_t)_{t\in\boldsymbol{R}_+}$ 是 X 上的预解式，X 上的一个可取 $+\infty$ 的非负 Borel 函数 f 若满足下述条件则称为 $\mathscr{U}$ **超过函数**：

（1）对所有 $t\in\boldsymbol{R}_+$，$t\mathscr{U}_tf\leqslant f$；

(2) 对所有 $x \in X, \lim_{t\to\infty} t\mathscr{U}_t f(x) = f(x)$.

X 上的一个位势 p 称为**严格的**,若对 X 上任何两个测度 μ,ν,从下列两个条件可推出 $\mu=\nu$:

(1) $\int p\mathrm{d}\mu = \int p\mathrm{d}\nu < \infty$;

(2) 对 X 上每个非负超调和函数 u,有 $\int^* u\mathrm{d}\mu \leqslant \int^* u\mathrm{d}\nu$.

基于上述基本概念,利用推广的 Hille-Yosida 引理可以证明下述主要定理:

定理 设 p 是 X 上的有界、连续、严格的位势,那么存在唯一的可积次 Markov 半群 $\mathscr{P}=(\mathscr{P}_t)_{t\in\boldsymbol{R}_+}$ 使得对每个 $f\in\mathscr{C}_c(X)$ 且 $f\geqslant 0$ 及任何 $t\in\boldsymbol{R}_+$, $\mathscr{P}_t f$ 是连续的且对任意 $x\in X$,

$$f\cdot p(x) = \int_0^\infty \mathscr{P}_t f(x)\mathrm{d}t;$$

进一步,$\mathscr{P}$ 超过函数全体与 X 上的非负超调和函数要通过它们之间的一一对应而一致化.

这结果把与 Hunt 过程密切关联的位势论推广到调和空间上来.

§5 位势论与其他数学分支的联系及发展

关于位势理论与其他数学分支的联系可以从两个方面来看.

第一,由于在古典理论中,位势本是一个奇异积分,在不分布质量的地方是一个调和函数,满足 Laplace 方程,所以它与实函数、解析函数、以及偏微分方程密切相关.实际上,位势论是从它们独立出来的一个分支.一百五十年来,位势论的发展与上述数学分支互相渗透,现在仍是如此.这是位势论研究的主要方面,从近来的研究成果来看,绝大部分也是属于这个方面.

第二,位势论与概率论的联系.概率论同位势论一样也有长远的发展历史,但只是在最近半个世纪,它们之间的本质联系才被揭

示出来.这对二者的发展都产生了重大的影响,值得特别注意.由于一般读者对此可能不太熟悉,因此我们在下面着重介绍一下位势论与概率论的联系,这就是5.1的内容.然后在5.2中简单说明一下位势论和其他数学分支的联系及发展.最后5.3是张鸣镛教授的一个展望,作为本节的结束语.

5.1 位势论与概率论的联系

本世纪四五十年代,Kakutani, Kac及Doob等人先后发现经典位势论与Brown运动之间的深刻联系.Doob为发展这种联系做了大量的工作,Hunt进一步把它推广到相当一般的Markov过程(Hunt过程).从此,位势论的基本概念及性质获得了明确的概率意义,而分析工具的引入大大促进了概率论的发展.上鞅与上调和函数的对应,它们的单调列的极限及Riesz分解的极端相似,揭示了鞅论与位势论的内在联系;Martin边界被翻译成概率的语言并用于研究Markov过程;由于调和空间引入了Markov半群,并且由这个半群可构造一个具有连续轨道的Markov过程,公理化位势论使随机过程理论提高到一个新水平;C^∞ Riemann流形上由于McKeen等人用随机微分方程建立扩散过程而提供了用概率方法研究位势论的一种方法.总之,位势论与随机过程论日益结合,相互促进,加速了这两个分支的发展.

下面着重介绍经典位势论与Brown运动之间的联系.

设$\mathscr{B}^n$为n维欧氏空间$\boldsymbol{R}^n$的Borel代数,$n\geqslant 1$,$\{X(t)\}_{t\in\boldsymbol{R}_+}$为$\boldsymbol{R}^n$上的Brown运动,$\{P_x | x\in\boldsymbol{R}^n\}$为相应的概率测度族,$p(t,x,y)$为转移密度.对$B\in\mathscr{B}^n$,当存在$t>0$使$X(t)\in B$时,令$\tau_B$为这样的$t$的下确界,否则,令$\tau_B=\infty$.对$B$的余集$C(B)$,令$T_B=\tau_{C(B)}$;又,当$\tau_B<\infty$时,记$L_B=\sup\{t>0 | X(t)\in B\}$,当$\tau_B=\infty$时,令$L_B=0$.分别称$\tau_B$,$T_B$,$L_B$为$X(t)$对$B$的**首中时间、首出时间、退出时间**.而

$$h_B(x,\cdot):=P_x(\tau_B<\infty,X(\tau_B)\in\cdot)$$

及

$$q_B^t(x,\cdot):=P_x(\tau_B>t,X(t)\in\cdot)$$

分别称为从 x 出发的 Brown 运动对 B 的**首中分布及禁止分布**. 若对所有的 $x\in\boldsymbol{R}^n$, $P_x(\tau_B<\infty)=1$(或 0),则称 B 是**常返集**(或**非常返集**). 那么,经典位势论的基本概念及性质可作如下描述:

(1) x 为 B 的正则点(或非正则点)当且仅当 $P_x(\tau_B=0)=1$(或 0). 其直观意义是从 x 出发的 Brown 粒子能(或不能)立刻击中 B. B 是极集的充要条件是 $P_x(\tau_B<\infty)=0$, $x\in\boldsymbol{R}^n$,即从任何点 x 出发的 Brown 粒子都永远不能击中 B.

(2) 对 $\boldsymbol{R}^n$ 的非空开集 D, $n\geqslant 2$,从 $x\in D$ 出发的 Brown 运动对 $C(D)$ 的击中分布 $H_D(x,\cdot)$ 正好是 D 在 x 的调和测度. 这时,关于在 $B(D)$ 上定义的有界且本性连续(除去一个调和测度零集外连续)的函数 f,一般 Dirichlet 问题的解

$$H_f(x)=\int f(y)H_D(x,\mathrm{d}y)=E_x(f(X_{T_D}),T_D<\infty),$$

它在 f 于该处连续的正则边界点 y(即 $y\in B(D)$ 且为 $C(D)$ 的正则点)处以 $f(y)$ 为边界值. 另,当 $n\geqslant 3$ 且 $C(D)$ 为有界时,若事先不限制解在无穷远点的极限值,则解不唯一,但每个有界解可表为

$$E_x[f(X_{T_D}),T_D<\infty]+aP_x(T_D=\infty),$$

其中 a 是常数.

(3) $\boldsymbol{R}^n$ 的非空开集 D 若存在 Green 函数则称之为 Green 集. D 的 Green 函数可表示为

$$G(x,y)=\int_0^\infty\{p(t,x,y)-E_x[p(t-T_D,X(T_D),y),T_D<t]\}\mathrm{d}t.$$

而 $U^\mu(x)=\int G(x,y)\mathrm{d}\mu(y)(\mu\geqslant 0)$ 就是 D 上的 Green 位势.

(4) 当 $n\geqslant 3$ 时, $\int_0^\infty a_n p(t,x,y)\mathrm{d}t$ 即为 Newton 核 $|x-y|^{2-n}$,其中常数 $a_n=2\pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)$.

当 $n=2$ 时，$\pi\int_0^{\infty}[p(t,x,y)-p(t,x_0,y_0)]\mathrm{d}t$ 即为对数核 $-\log_e|x-y|$，其中 x_0,y_0 为满足 $|x_0-y_0|=1$ 的固定点，从而得到用转移密度表示的 Newton 位势与对数位势.

(5) 设 f 是从非空开集 D 到 $[0,+\infty]$ 的函数，在 D 的任一成分上不恒为 $+\infty$. 若对 $t>0$ 及 $x\in D$ 恒有

$$f(x)\geqslant\int f(y)q_{C(D)}^{t}(x,\mathrm{d}y),$$

且当 t 单调递减趋于 0 时，积分式收敛于 $f(x)$，则称 f 是 D 上的**超过函数**. 那么，$f\geqslant 0$ 在 D 内上调和当且仅当 f 为超过函数.

(6) 类似地，可通过转移密度、击中分布、禁止分布等概念来描述 Riesz 分解、平衡问题、能量、容量、扫除、瘦等位势论的基本概念及它们的性质，这使得经典位势论的概念都赋予相应的概率意义. 例如，Dirac 测度 ε_x 到 $B\in\mathscr{B}^n(n\geqslant 3)$ 的扫除测度(又称 Green 扫除)即为 B 的击中分布 $h_B(x,\cdot)$. 对 Green 集 D 内的相对紧的 Borel 集 B，任意正测度 μ 到 B 的扫除测度 μ' 存在，μ' 集中在 B 的基(即 B 的正则点全体)且

$$U^{\mu'}(x)=P_x(\tau_B<T_D),$$

上式也是到 Borel 集 B 的扫除测度存在的充分条件.

把上述空间 $\boldsymbol{R}^n$ 换成较为一般的局部紧可分度量空间，Brown 运动就变成 Hunt 过程. 这时，测度的扫除、位势的概念等都可建立，并可进一步研究各种与上述类似的问题.

这一些深刻的联系吸引了许多位势论及概率论方面的著名的数学家，他们曾集中了很大的精力从事这方面的研究. 前者如 Brelot，Choquet，Deny 及他们的学生们，还有 Hunt，Bauer 以及罗马尼亚的 Boboc，Bony，Constantinescu，Cornea 等. 后者如 Doob，Meyer，钟开莱等. Doob 的《Classical Potential Theory and its Probabilistic Counterpart》(Springer-Verlag，1983) 以及 Bliedtner 和 Hansen 的《Potential Theory: an analytic and proba-

bilistic approach to balayage》(Springer-Verlag,1986)对此有系统的说明.

国内的位势论研究也开始在调和空间的广义正则容量、上调和函数延拓、流形上的 Brown 运动、群上的位势论方面做了一些工作,也有从概率论的观点出发研究了与位势论有关的问题.

5.2 位势论与其他数学分支的联系及发展

从位势论的发展史可以看到,位势论是在 Riemann 的函数论的推动下发展壮大的.而现在,位势论反过来用现代化的分析工具从各方面来加强函数论,这可以说是一种反哺过程.位势论向函数论提供的工具主要有两类:一类是由扫除法建立起来的关于调和测度、平衡分布等等的精致的存在定理及极值定理;另一类是细拓扑、Martin 边界等等描写函数的极限行为的清晰的新概念.

从 20 年代 Nevanlinna 理论产生以来,位势论方法在函数值分布理论上的重要作用是众所周知的.目前聚值理论、Riemann 曲面分类理论等等实际上已经与位势论分不开了.

在共形映射的存在问题上,位势论方法比古典方法优越也是显然可见的.由 Green 函数、平衡位势的存在定理直接可以推出有关的各种标准的共形映射的存在定理,并且超过了关于联结重数及边界光滑性等等限制.

在几何函数论的基本原理上,用位势论也可以得到深入得多的论点.例如,用 Schwarz 引理或从属原理只能得到一个单连通区域的映射半径不小于任何一个子区域的映射半径,而两个区域没有这种包含关系时,就没有有效的方法来比较它们的映射半径.但是,用位势论方法容易证明:一个包含原点 O 的有界单连通区域 D 在 O 点的映射半径 r_0 满足 $r_0r_0^*\leqslant 1$,这里 r_0^* 表示 D 的外部关于单位圆的对称区域在 O 点的映射半径.只有 D 是以 O 为中心的圆,等号才成立.因此,假如 $r_0^*\geqslant r_0$,那么 $r_0\leqslant 1$,等号只有当 D 是开单位圆时才成立.由上述结论可以直接得到 Koebe 定理及其推

广.

上调和函数及多重调和函数在多复变函数论中的作用也是很明显的.

至于位势论对其他数学分支的作用与影响,我们简单说明如下.

位势论对度量拓扑(metric topology)的影响由来已久.点集的超限直径、Hausdorff 测度及非整数维数等等概念跟位势论的关系非常明显.Kolmogoroff 定义的函数空间的熵的概念是又一个例子.

由于几何测度论的产生及发展,位势论与同伦论的关系也得到发展.位势论方法的应用将在微分拓扑或流形上的分析取得有意义的进展.

在椭圆型和抛物型方程的研究中,已相当广泛地采用位势论方法,各种理想边界的概念已常被使用.

由于位势与它的核的关系可以用 Fourier 变换来说明(参见 1.5 及 3.2 等),位势论与调和分析的关系目前越来越多地受到注意.

经典与一般核的位势论及其在相邻数学分支的应用是众多位势论学者所从事的研究对象.下面列举一些工作以供读者参考,但并非全面介绍.挂一漏万、舍本从末是在所难免的.

例如,Ancona 等人关于 $\boldsymbol{R}^n$ 区域的 Martin 边界问题以及边界 Harnack 原理的研究;Karan, Schiff, Stoll 等人关于边界极限与唯一性定理的研究;J. S. Hwang 关于细极限、细聚值的研究;Kaufmand, J. M. Wu, Makarov 等人关于共形映射下的边界畸变及调和测度的研究;Armitage 与 Gardiner 等人关于下调和函数的平均值与积分的研究;Brelot 与 Anadam 关于广义对数位势的研究;Nakai 与 Sario 关于调和维数及椭圆维数的研究;Fuglede 等人关于细解析函数的研究;苏联学者在各个方面都有出色的工作.

中国学者在边界值问题、细解析函数、广义对数位势、Martin

边界、Riemann 曲面以及多重调和函数等方面也做了一定的工作.

5.3 展望

国内杰出的函数论、位势论专家张鸣镛教授于 1979 年曾对位势论与函数论的关系做了一个展望.他认为“在以抽象分析为主的数学分析的现阶段,位势论已成为独立于函数论之外的分支.二者虽然关系密切,但是目前位势论与随机过程的结合显然吸引着人们更多的注意力.应该承认这种结合对于双方理论的充实及提高都非常有利,但也应该看到位势论面临的新的重大任务.”

“位势本来是向量场的不定积分,在一维的情况下,不定积分跟定积分的概念是一致的,关于它的存在及各种性质在实函数中有充分的讨论.但是在高维的情况,向量场的不定积分的存在要求向量场的外微分等于 0.在二维的情况,一个向量场有自己的对偶向量场.一个外微分与反外微分都等于 0 的向量场叫做调和场,它的位势就是原调和场的位势的共轭调和函数.Riemann 就是通过这个事实把函数论与位势论联系在一起.”

在 $n(n\geqslant 3)$维的情况,仍有向量场的对偶和调和向量场的概念,并已建立了多重向量场的初步理论系统,留数定理也推广到它上面去了.“但至今尚未有人把扫除法等推广到多重向量位势上去,也还没有人利用扫除法所建立的‘Green 多重向量场’来推广 Riemann 函数论的观点”.

“Riemann 的思想为建立单纯化定理开辟了道路,这个单纯化定理实际上是二维流形拓扑学的基本定理.高维流形的拓扑学的基本定理是否也应该用类似方法建立? Riemann 函数论的观点是否足以启发我们去建立一门新的‘同调分析’呢?”张先生说:“希望不久能看到这个问题的解答.”

记 号 表

A'	A 的导集	41
$\overline{A}$	A 的包	41
$\tilde{A}$	A 在 $\tilde{\boldsymbol{E}}^n$ 里的包	172
$C(A)$	A 的余集	1
$B(A)$	A 的边界	41
$\hat{B}\ (\Omega)$	分歧边界	229
$\hat{\Omega}$		229,235
$\tilde{X}$	X 的单点紧致化	172
$\tilde{Q}$	Q 的对称点	91
$\hat{Q}\ ,(Q,\gamma)$	尽头	227,228
(B)		43
$\{P\},\{P_n\}$	单点集,点列	1
$\boldsymbol{E}_P,\boldsymbol{E}^Q$	X 截,Y 截	23
$\Omega_\sigma,\Omega_\delta$		32
$K_\sigma,K_{\sigma\delta}$		161
F_σ,G_δ		162,161
$\boldsymbol{E}^n$	欧氏空间	42
$\tilde{\boldsymbol{E}}^n$	$\boldsymbol{E}^n$ 的单点紧致化	172
$\boldsymbol{V}^n$	n 维欧氏向量空间	30
$K(P,r)$	球	43
$S(P,r)$	球面	65
K_n	球体积	102
σ_{n-1}	球面积	85
$\boldsymbol{R}^1,\dot{\boldsymbol{R}}^1$	实数域,扩充实数域	42
$f_+(P),f_-(P)$		11
$\{v_1,E_1,\cdots,v_n,E_n\}$	简单函数	14

χ_E	E 的特征函数	21
$f\|A, f\|_A$	f 在 A 上的限制	56
$\overline{H}_f, \underline{H}_f, H_f$	上解,下解,解	204,216
$\overline{H}_f^W$	上解	218
$\mathscr{E}, \mathscr{E}^+$	Radon 测度,正测度族	128,131
$\mathscr{E}_K, \mathscr{E}_K^+, \mathscr{E}_K^+, \mathscr{E}_{K,\iota}$		134,144
$\mathscr{L}_x, \mathscr{L}_y, \mathscr{L}_{xy}$	Lebesgue 可测集族	29
$\mathscr{L}(\mu), \mathscr{L}_p(\mu)$	可积函数族	53
$\mathscr{K}(X), \mathscr{K}_0(X), \mathscr{K}_0$	有界连续函数族	47,48,132
$\mathscr{H}, \mathscr{H}^+$	调和、正调和函数族	237,238
$\mathscr{D}(\Omega)$		240
$\mathscr{U}_f$		203
$\Phi_f^\Omega, \Phi_f, \hat{\Phi}_f$		207,233
$\Psi_f^\Omega, \Psi_f, \hat{\Psi}_f$		207,233
φ-lim	细极限	193
$\int_E f(P)\mathrm{d}\mu(e_P)$, $\int f\mathrm{d}\mu$	积分	11
$\overline{\int} f\mathrm{d}\mu$, $\underline{\int} f\mathrm{d}\mu$	上、下积分	203
o	零测度	3
ε_P,	单位质点的分布	3
$\varepsilon_{P,r}, \tau_{P,r}$	单位质量的均匀分布	89,102
η_P	调和测度	145
$\underline{\eta}, \overline{\eta}$	内、外调和测度	205
$\hat{\eta}_P$	分歧调和测度	233
γ	容量分布	148
γ_*, γ^*	内、外容量分布	160
ω	平衡分布	149,151
ω_P	立体角测度	85
σ, τ, τ^n	Lebesgue 测度	84,101

$\mu\|\Delta, \mu\|_\Delta$	μ在Δ上的限制	32
$\mu, \mu(A)$		1
$\mu+\nu, \mu-\nu, \mu\times\nu$		6,27
$\mu_+, \mu_-, \|\mu\|$	μ的正、负、全变差	6,19
$\bar{\mu}$	完备化	29
μ_*, μ^*	内测度、外测度	41,36
μ_c^*	c度 Hausdorff(外)测度	41
$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$		22
$(\mu,\nu)_{E^n}, (\mu,\nu)_{K(O,R)}$	μ,ν的相互能量	77,128
$(\mu,\nu)^*_{E^2}$	改良的对数相互能量	136
$(\mu,\nu)_{(\alpha)}$	α级相互能量	125
(μ,ν)		77,128
$U^\mu_*, U^\mu_{K(O,R)}$	位势	77,113
U^μ		77,114
$U_2^{*\mu}$	改良对数位势	135
$U^\mu_{(\alpha)}$	α级位势	124
$\mathrm{Cap}(A), \mathrm{Cap}_{K(O,R)}(A)$	容量	148,150
$\mathrm{Cap}_i(A), \mathrm{Cap}_e(A)$	内、外容量	159
C_l, C_{li}, C_{le}	对数容量	164
C_{Wi}, C_{We}	Wiener 容量	164

索　　引

（汉字按汉语拼音顺序排列）

A

Alexandroff 点　172

B

Banach 空间　123

　　候补(准)～　123

Brown 运动　214

(B)集,(B)可测集,Borel 集　43

(B)可测函数　43

标准正交基底　81

C

Cantor 三分集　187

测度　2,32

　　(B)～　43

　　Baire～　66

　　Borel～　66

　　乘积～　27

　　Dirac～　3

　　分歧调和～　233

　　Hausdorff(外)～　41

　　开 σ 有限的～　45

　　Lebesgue～　82,84,101

　　立体角～　85

　　零～　3

　　内～　41

　　内、外调和～　205

　　Radon～　63,66,233

　　特征～　223

　　调和～　145

　　外～　36

　　相对于 Ω 的～　113

　　正～　5

　　正统～　244

　　正则的～　46

　　σ 有限的～　20

超面积　84

超曲面　83

D

Dirichlet 积分　89

Dirichlet 问题　92,196

单点紧致化　172

单位质点　2

倒反律(reciprocity law)　77

定理

　　Baire～　203

　　Banach～　224

　　Brelot～　209,216

　　Brelot-Cartan～　116

Cartan～ 139,166,190
Egoroff～ 13
Evans-Vasilescu～ 79
Frostman-Cartan～ 139
Frostman-Keldysh～ 219
Fubini～ 28
Keldysh～ 224
Kellogg-Evans～ 201
Lebesgue～ 17,18
Radon-Nikodym～ 20
F. Riesz～ 48,118
F. Riesz 分解～ 110
de la Vallée Poussin～ 230
Wiener-de la Vallée Poussin～ 196
选择～ 69
对数平衡分布 151
对数容量、解析容量 151
对数位势 77
改良的～ 135

F

Fatou 引理 17
F_σ 集 162
法线向量 83
繁殖 23
肥 176
肥集 190
肥拓扑 190
分歧边界 229
分析集 163
负变差 6
负集 7

G

Green 公式 87,89
Green 函数 91,146
Green 平衡分布 149
Green 区域 234
G_δ 集 161
干脆性(resolutive) 209
共轭空间 225
关闸(barrier) 202
广泛可定容(universally capacitable) 161
广义容量 161
广义线性函数(泛函) 48

H

Hahn 分解 9
Hilbert 空间 121
候补～ 120
Hölder 不等式 19
Hölder 条件 103
浑(vague)极限 64
浑收敛、浑拓扑 64,73

J

Jordan 分解 9
积分 11
超曲面上的～ 84
几乎处处(相对于 μ)
(μ-almost everywhere) 13
几乎一致收敛,几乎连续 56
极大值原理 170,232
极小点 239
极小值原理 97

极小调和函数 237
极端元素 237
简单函数 14
简单区域 99
交错法 120
截 23
紧致化，紧扩张 171
紧致有限 66
近乎处处(approximately everywhere) 166
尽头 227
局部紧致 63
聚值 228
绝对可加 1
绝对连续 19
绝对质量(全变差) 19
均匀分布 89

K

K 分析集 163
K_σ 集，$K_{\sigma\delta}$集 161
开 σ 有限的(B)测度 45
可测(相对于 μ) 2，10
(μ^*)可测 36
可定容 159
可定 φ 容 161
可分的(separable) 224
可积分 11
扩张 32

L

Lebesgue 定理 17，18
Lebesgue 刺(cusp) 177，178
Lie 群 63
立体角 85
零集(相对于 μ) 13
零容集 137，165，168
零内容集，零外容集 165，168
凌驾原理(principle of domination) 139
　小～ 153
　狭义～ 154
流形 82

M

Martin 边界 235
Martin 紧致化 235
Minkowski 不等式 19

N

Newton 位势 75，77
内藏的边界部分 212
内瘦 188
能量 77

O

欧氏空间 42
欧氏向量空间 80

P

平衡分布 149
　对数～ 151

Q

强的次可加性 158
强收敛 128
切超平面 84

趋肤效应 140
曲线、曲线弧 81
全变差(绝对质量) 19

R

M. Riesz 组合公式 124
容量 148,160
　对数(解析)～ 151
　Green～ 148
　广义～ 161
　Newton～ 148
　内、外～ 159
　Wiener～ 155
　内、外 Wiener～ 164
　内、外对数～ 159,164
容量分布 148,160
　Green～ 148
　内、外～ 160
　Wiener～ 155
弱收敛 131
弱拓扑 224

S

Stone 逼近原理 240
σ 环、σ 代数 1,20
σ 有限 20
扫除 119,137,143
　内、外～ 156
　极～ 145
扫除法 137,145
上半连续 78
上积分 203
上解(upper solution) 204,218
上调和(super harmonic) 94
四角格局、格子 242
似乎处处(quasi-everywhere) 137,166
瘦(thin) 176
　内～ 188

T

特征函数 21
特征细邻域 220
调和测度 145
　分歧～ 233
　相对于 E^n 的～ 145
　相对于 $K(O,R)$ 的～ 146
　内、外～ 205
调和下属(harmonic minorant) 118
通常拓扑 42
投影 121
　正交～ 123
统计力学 214
凸锥 121

V

Vallée Poussin 判别法 185

W

Wiener 判别法 185
无限远点 172
完备化 29,61
完备的 36
完全可加的 1
完全正常的拓扑空间 (fully normal space) 43
外点 187
外肥 188

外区域 156
位势 77
　　对数～ 77
　　对数导体～ 151
　　改良的对数～ 135
　　容量～ 148
　　内、外容量～ 160
　　Green～ 114
　　Green 导体～ 149
　　Newton～ 75,77
　　Riesz～ 124
　　α 级～ 124

X

细胞 42
细极限 190,193
细开集 190
细拓扑(fine topology) 190
下半连续 78
下积分 203
下解(lower solution) 204
下调和(subharmonic) 94
限制(restriction) 32,56
线性算子、线性泛函 48
相互能量(mutual energy) 77,125
　　Newton～ 127
　　Green～ 128
　　对数～ 127
　　改良的对数～ 135

Y

遗传(hereditary) 36
压缩原理 157
右半连续性 158

Z

直角坐标法 42
质量 2
质量分布 2
直线、直线段 81
正变差 6
正集 7
正交余空间 123
正交投影 123
正则边界点 196
正则的测度 46
支柱(support) 67,78
子乘积集 23
总(质量)σ 有限 20
最大的调和下属 118

外区域 156

位势 77

对数～ 77

对数导体～ 151

改良的对数～ 135

容量～ 148

内、外容量～ 160

Green～ 114

Green 导体～ 149

Newton～ 75,77

Riesz～ 124

α 级～ 124

X

细胞 42

细极限 190,193

细开集 190

细拓扑(fine topology) 190

下半连续 78

下积分 203

下解(lower solution) 204

下调和(subharmonic) 94

限制(restriction) 32,56

线性算子、线性泛函 48

相互能量(mutual energy) 77,125

Newton～ 127

Green～ 128

对数～ 127

改良的对数～ 135

Y

遗传(hereditary) 36

压缩原理 157

右半连续性 158

Z

直角坐标法 42

质量 2

质量分布 2

直线、直线段 81

正变差 6

正集 7

正交余空间 123

正交投影 123

正则边界点 196

正则的测度 46

支柱(support) 67,78

子乘积集 23

总(质量)σ 有限 20

最大的调和下属 118